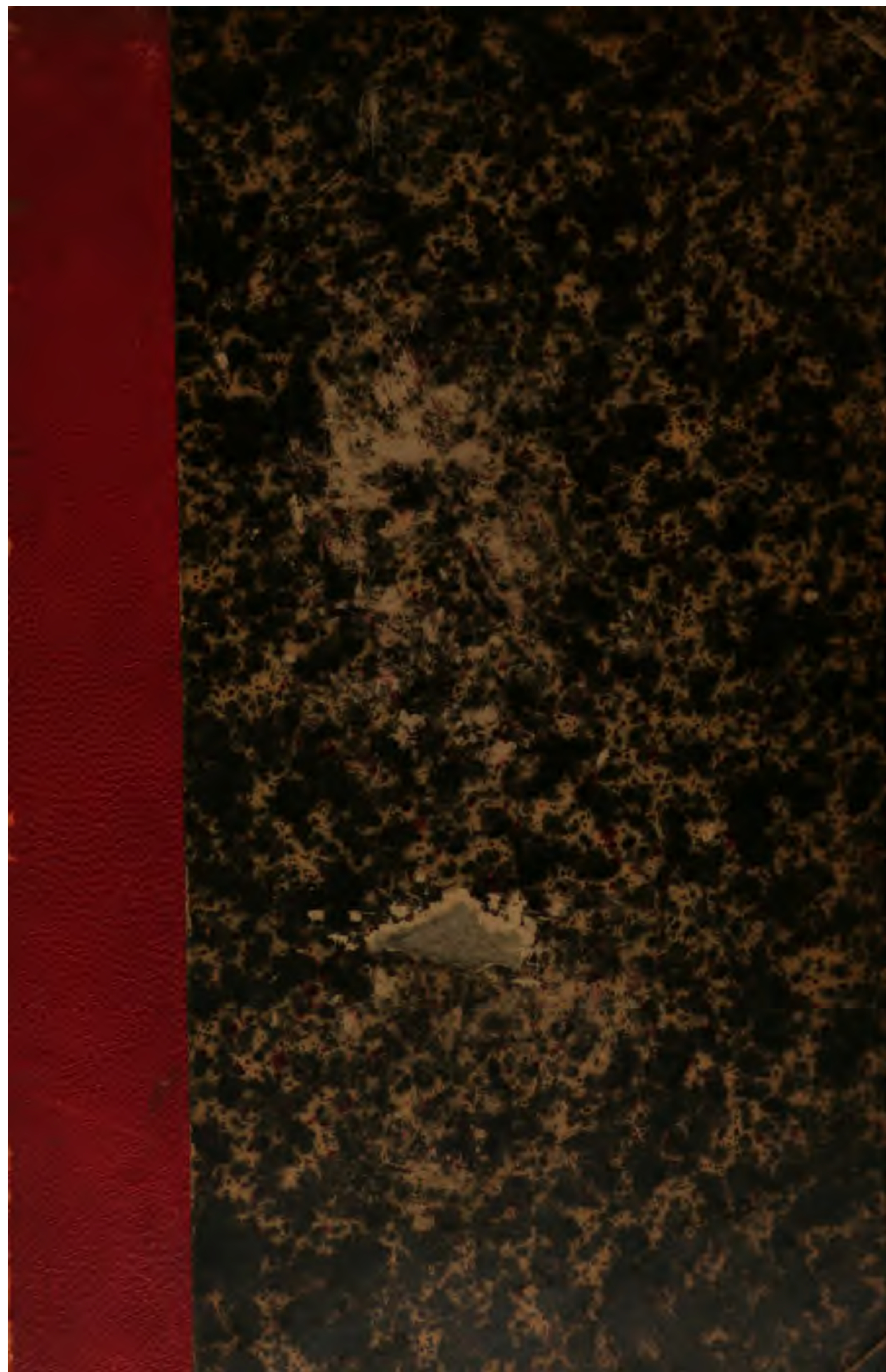
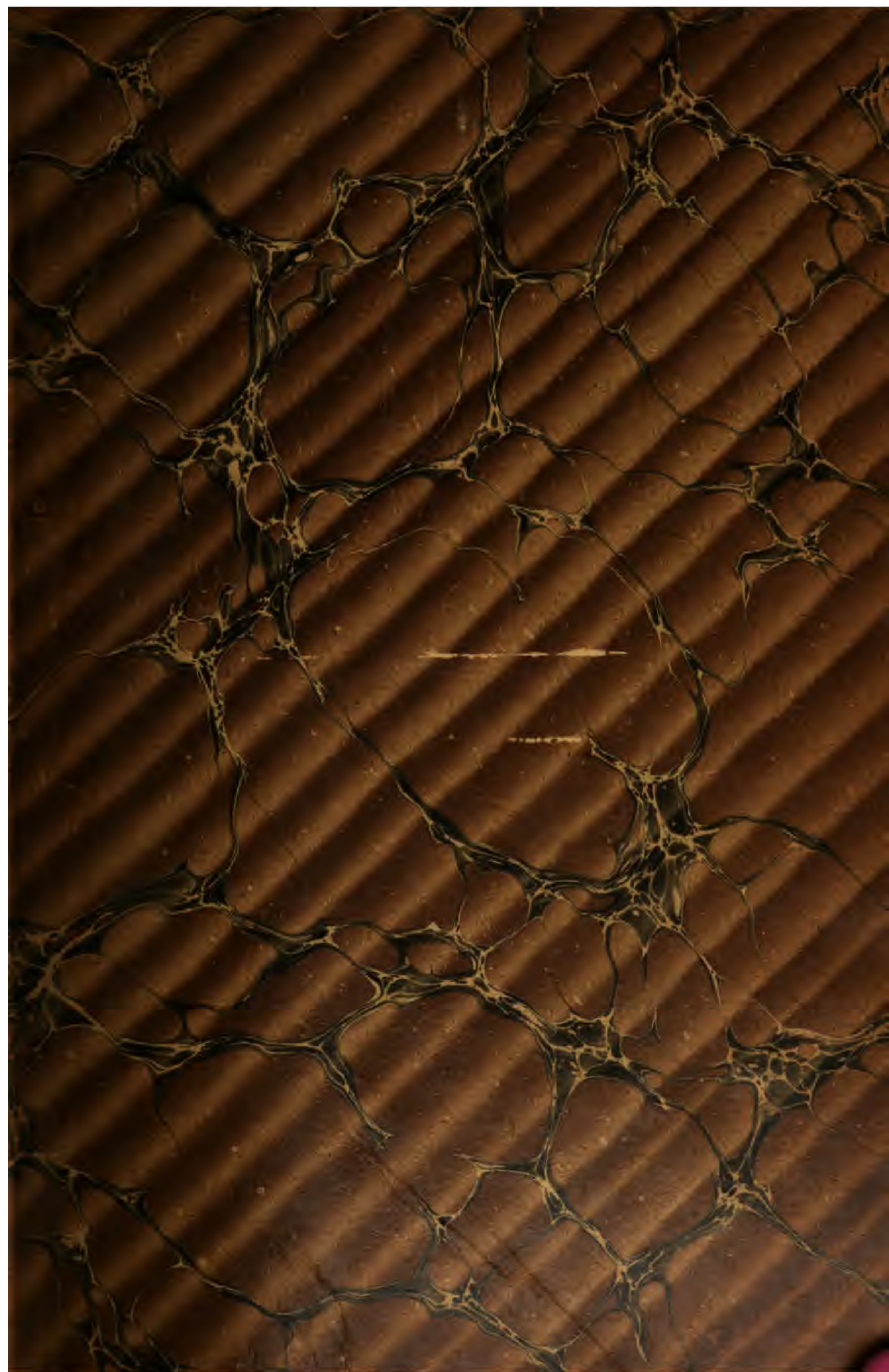






LEÇONS ÉLÉMENTAIRES

SUR LA THÉORIE DES

FONCTIONS ANALYTIQUES

PAR

Édouard A.-FOUËT,

PROFESSEUR A L'INSTITUT CATHOLIQUE DE PARIS.

PREMIÈRE PARTIE

(CHAPITRES I A V.)



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1902

LEÇONS ÉLÉMENTAIRES

SUR LA THÉORIE DES

FONCTIONS ANALYTIQUES.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
30568 Quai des Grands-Augustins, 55.

LEÇONS ÉLÉMENTAIRES

SUR LA THÉORIE DES

FONCTIONS ANALYTIQUES

PAR

Édouard A.-FOUËT,

PROFESSEUR A L'INSTITUT CATHOLIQUE DE PARIS.

PREMIÈRE PARTIE

(CHAPITRES I A V).



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1902

LEÇONS ÉLÉMENTAIRES

SUR LA THÉORIE DES

FONCTIONS ANALYTIQUES.

INTRODUCTION.

SECTION I.

LES FONCTIONS EN GÉNÉRAL.

§ I. — PRÉLIMINAIRES.

1. L'idée de nombre et la notion de fonction sont à la base de l'Analyse.

On a d'abord considéré le nombre entier positif ([1]). Aussi les premiers Chapitres de la Science mathématique sont-ils consacrés à l'étude des propriétés du nombre entier, par suite à l'Arithmétique et à l'Algèbre ([2]). A leur domaine, on rattache les fonctions entières de variables entières et positives, à coefficients entiers et

([1]) « Le seul objet propre de la pensée mathématique, c'est le nombre entier positif. C'est le monde extérieur qui nous a imposé le continu, que nous avons inventé sans doute, mais qu'il nous a forcés à inventer. Sans lui, il n'y aurait pas d'analyse infinitésimale; toute la science mathématique se réduirait à l'Arithmétique ou à la Théorie des substitutions.... Sans doute, on vous dira qu'en dehors du nombre entier, il n'y a pas de rigueur et, par conséquent, pas de vérité mathématique.... Ne soyons pas si puristes et soyons reconnaissants au continu qui, si tout sort du nombre entier, était seul capable d'en faire tant sortir. » POINCARÉ, *Sur les rapports de l'Analyse pure et de la Physique mathématique* (*A. M.*, t. XXI, p. 238).

([2]) *Cf.* MOLK, *A. M.*, t. VI, p. 2. En Algèbre, le procédé le plus important est le calcul littéral : son emploi même est si général qu'on le prend souvent comme synonyme d'*Algèbre*.

For contents and preface see pt. ii.

positifs, car l'étude de pareilles fonctions revient à celle de systèmes de nombres entiers : on y ramène les nombres rationnels, positifs ou négatifs, car une égalité contenant des nombres rationnels peut être transformée en égalité équivalente, ne renfermant que des entiers positifs.

En Analyse, on envisage aussi les nombres irrationnels [1], algébriques ou transcendants [2], et les grandeurs continues. Les gran-

---

(1) Il y a plusieurs manières de présenter la définition des nombres irrationnels (cf. *Encyklopädie der mathem. Wissenschaften*, t. I, p. 53). On peut, par exemple, d'après Dedekind, adopter le procédé suivant :

I. Séparons les nombres rationnels en deux classes (on les représentera par des petites lettres et des majuscules) telles que : 1° chaque nombre rationnel appartienne à l'une des deux classes; 2° chaque nombre A de l'une des classes soit supérieur à un nombre quelconque a de l'autre classe; 3° il n'y ait pas parmi les nombres de la classe a de nombre plus grand que tous les autres, et parmi les nombres de la classe A de nombre plus petit que tous les autres.

Cette *loi de séparation* servira de définition à un nombre irrationnel α. On lui donnera sa place dans l'échelle des nombres rationnels, en disant que, par définition, α *surpasse* les nombres rationnels a et *est inférieur* aux nombres rationnels A. On comparera deux nombres irrationnels $\alpha(a, A)$, $\beta(b, B)$ ainsi définis, en disant que α est *plus petit* que β, et β *plus grand* que α (on écrira $\alpha < \beta$, $\beta > \alpha$), lorsque chaque nombre a est inférieur à chaque nombre B.

II. Considérons une suite illimitée de nombres rationnels ou irrationnels allant en croissant $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ tous inférieurs à un nombre fixe L. A cette suite correspond une *séparation* des nombres rationnels en deux classes. Les uns surpassent tous les termes de la suite; je les appelle A et je représente les autres par a (notons que, dans cette suite a, il n'y a pas de terme supérieur à tous les autres).

Deux cas sont possibles : 1° dans la suite A, il n'y a pas de nombre plus petit que tous les autres. Alors les deux suites (a, A), jouissant des trois propriétés énoncées au n° I, définissent un nombre irrationnel α. On dira que la suite donnée *définit* aussi ce nombre α; 2° dans la suite A, il y a un terme minimum A_0. La suite donnée définira alors le nombre A_0 lui-même.

Suivant les cas, on écrira $\lim a_n = \alpha$; $\lim a_n = A_0$.

Réciproquement, chaque nombre irrationnel défini par le premier procédé peut être regardé comme déterminé par cette suite de nombres croissants.

Ces définitions permettent de passer à celles de somme, de différence, de produit, de quotient de deux nombres irrationnels, et d'étendre à ces nombres les règles de calcul applicables aux nombres rationnels (*cf.* Tannery, *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable.* — Stolz, *Allgemeine Arithmetik*, *etc.*).

(2) Par *nombre algébrique* on entend les racines des équations algébriques *à coefficients entiers* (les racines des équations à coefficients algébriques sont aussi des nombres algébriques). Aux nombres algébriques sont opposés les nombres *transcendants* : par exemple, les deux nombres fondamentaux en Mathématiques, e et π, sont transcendants, comme l'ont montré Hermite (1873) et M. Lindemann (1882).

deurs réelles, associées suivant des conventions déterminées, conduisent aux grandeurs complexes, dont on peut encore rattacher la définition à celle des congruences de module x^2+1 ([1]).

A l'étude du nombre se joindra celle de la fonction.

2. La notion de fonction est aujourd'hui d'une extrême géné-

([1]) Les nombres imaginaires ou *impossibles* furent introduits au XVII[e] siècle pour permettre dans tous les cas la résolution des équations d'abord du second degré, puis du troisième et du quatrième : ils permirent à Euler de découvrir un lien entre les fonctions trigonométriques et l'exponentielle. Les doutes relatifs à la légitimité de leur emploi cessèrent après les résultats obtenus par Gauss (en Algèbre et dans la Théorie des nombres), Abel et Jacobi (dans celle des fonctions elliptiques) [*cf.* GAUSS, *Œuvres,* t. III, p. 3. C'est lui qui substitue au mot *imaginaires* le terme plus heureux *grandeurs complexes* (*Œuvres,* t. II, p. 172)].

Cauchy les rattacha d'abord au *calcul symbolique.* « L'emploi des équations symboliques est souvent un moyen de simplifier les calculs et d'écrire sous une forme abrégée des résultats compliqués en apparence... » (Résumés de Turin; *Œuvres,* 2[e] série, t. X, p. 116). A ce point de vue on peut relier celui d'Hamilton qui regardait les imaginaires comme des grandeurs associées soumises à certaines règles de calcul. *Cf.* aussi MERAY, *Leçons nouvelles sur l'Analyse,* t. I, Chap. III. « Nous considérerons une imaginaire comme constituée par la simple association, dans un ordre déterminé, de deux quantités quelconques.... »

Plus tard, Cauchy ramena leur théorie à celle des *congruences* (*Sur la théorie des équivalences algébriques substituée à celle des imaginaires. Exercices d'Analyse et de Physique,* t. IV, p. 87; 1847). Deux polynomes $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont dits *congrus* ou *équivalents suivant le module* $g(x)$ lorsque leur différence est divisible par $g(x)$. D'après la notation donnée en Arithmétique par Gauss, on écrit

$$f(x) \equiv \varphi(x) \qquad [\operatorname{mod} g(x)].$$

Des congruences algébriques relatives au même module peuvent, comme les congruences arithmétiques, être combinées par voie d'addition et de multiplication. Prenons pour module x^2+1, et remplaçons la lettre x par i, qui sera ainsi une quantité réelle indéterminée. Un polynome sera *congru à zéro* (une imaginaire sera nulle), lorsque le nombre $\alpha + i\beta$ obtenu en y remplaçant i^2 par -1 sera nul pour toute valeur de i. De là la justification de toutes les règles de calcul.

De là aussi l'emploi d'imaginaires autres que $\sqrt{-1}$, comme on le fait dans des recherches spéciales d'Arithmétique : cela revient à substituer à x^2+1 un autre module (*cf.* MOLK, *A. M.,* t. VI, p. 8).

La notion de nombre complexe a encore été éclaircie par les recherches de Weierstrass sur les nombres complexes à n unités principales (*Œuvres,* t. II, p. 311; 1883) et surtout, depuis que M. Poincaré a ramené leur théorie à une question concernant la théorie des groupes (*C. R.,* 1884, 2[e] semestre, p. 740. — LIE-SCHEFFERS, *Vorlesungen über endliche continuierliche Gruppen,* p. 621).

Cf. aussi *Encyklopädie der mathem. Wissensch.,* t. I, p. 147.

ralité; mais c'est par une série d'évolutions que l'on est arrivé à cette extension ([1]).

On est parti d'expressions analytiques simples, et de combinaisons simples de ces expressions. « Les premiers analystes, dit Lagrange ([2]), n'avaient employé le mot de *fonction* que pour désigner les puissances d'une même quantité. On en a ensuite étendu la signification à toute quantité formée d'une manière quelconque d'une autre quantité ; il est aujourd'hui adopté pour exprimer que la valeur d'une ~~grandeur~~ *dépend* suivant une loi ~~déterminée~~ d'une ou plusieurs autres. » Et ailleurs, précisant ces lois, il les ramène principalement à la dérivation, à l'intégration, et au développement en série.

C'était bien l'idée d'Euler, qui regardait comme une fonction *ce qui a une expression analytique déterminée* ([3]). Il restreignait, il est vrai, cette définition, en ajoutant implicitement des conditions concernant la continuité de la fonction, l'existence et la continuité des dérivées. C'est que les fonctions s'introduisaient à l'occasion de problèmes pratiques tirés de la Géométrie, de la Mécanique ou de la Physique. Leur mise en équation comme leur solution reposait sur des hypothèses regardées peut-être comme nécessaires, alors qu'elles étaient surtout commodes et approximativement exactes. La conséquence en était le rejet de fonctions ne jouissant pas des propriétés correspondantes, comme de créations purement artificielles ou dont on n'avait même pas l'idée.

([1]) Leibniz et les Bernoulli semblent, les premiers, avoir donné à ce mot une acception large (*cf.* Liouville, *J. M.*, 1837, p. 71).

([2]) *Leçons sur le calcul des fonctions* (*Œuvres*, t. IX, p. 9). — Sur les travaux des géomètres du XVIII[e] siècle, *cf.* Bertrand, *Calcul différentiel et intégral*, t. I. Préface, p. 28 et suiv. — Lacroix, *Calcul différentiel et intégral*, 2[e] édition, t. I. Préface (1810). (On peut considérer cet Ouvrage comme résumant bien l'analyse ancienne, celle qui a précédé les travaux de Cauchy et d'Abel.)

([3]) *Functio quantitatis variabilis est expressio analytica quomodocumque composita ex illa quantitate variabili.* Il donne comme exemples : $a+3z$, $az-4zz$, $az+b\sqrt{aa-zz}$, c^z, etc. (*Introductio in Analysim*, édition de 1797, p. 4). Lacroix définit la fonction « toute quantité dont la valeur dépend d'une ou de plusieurs autres, qu'on sache ou qu'on ignore par quelles opérations il faut passer pour remonter de celles-ci à la première.... Ainsi... la racine d'une équation du cinquième degré... est fonction des coefficients de l'équation » (t. I, p. 1).

Néanmoins, ce fut à l'occasion d'une question de Physique mathématique, lors de la fameuse discussion relative au problème des cordes vibrantes (n° 83), que l'idée de fonction s'élargit et que l'étude des fonctions discontinues se développa. A ces progrès, Fourier et Dirichlet eurent une grande part.

Citons aussi Cauchy et Riemann. Ce dernier insiste sur ce qu'une théorie des fonctions en doit donner la figuration, indépendamment d'une méthode permettant de les déterminer par des opérations exécutées sur les grandeurs ([1]).

Ces travaux conduisaient à ne plus faire dépendre l'existence d'une fonction de la préexistence d'une expression analytique. Ainsi, la définition d'Euler se trouvait *trop étroite;* car à des conceptions possibles et même très importantes peuvent correspondre des fonctions n'ayant pas d'expression analytique unique dans tout leur domaine d'existence. Elle était *trop large,* si l'on se bornait à l'étude des fonctions intéressantes, car à une expression analytique donnée peut correspondre un ensemble de valeurs ayant des propriétés si dissemblables dans des régions voisines, qu'il est peu convenable de le considérer comme définissant une fonction ou du moins une fonction unique ([2]).

Quant aux fonctions continues, c'est le Mémoire de Riemann sur les séries trigonométriques qui inspira les premiers doutes sur l'existence de leur dérivée ([3]). A cette occasion, Riemann généralisa la notion d'intégrale définie et l'appliqua à des fonctions discontinues dans tout intervalle. Il en résultait indirectement (Riemann, sans rien publier, fit connaître cette conclusion) que *les fonctions continues n'ont pas forcément de dérivée* ([4]). Le premier, Weierstrass donna un exemple de fonction continue d'argument réel n'ayant de dérivée déterminée pour *aucune valeur*

([1]) Dissertation inaugurale. *Œuvres,* 1re édition, p. 38 (traduction Laugel, p. 47).

([2]) En parlant du *prolongement analytique* (n° 187), nous reviendrons sur le sens que l'on peut donner à ce mot *une même fonction.*

([3]) *Œuvres,* p. 225 (trad. Laugel, p. 239).

([4]) Ce qui résulte d'abord des travaux de Riemann, c'est l'existence de fonctions continues qui, dans tout intervalle, *n'ont pas de dérivée en une infinité de points,* alors qu'*en général* elles ont des dérivées dans cet intervalle. Pour des exemples, *cf.* DARBOUX, *A. E. N.,* 1875; p. 93. — PICARD, *Analyse,* 2e édition, t. I, p. 218.

de cet argument (¹). Peu après, M. Darboux en présenta des types variés : fonctions continues sans dérivée pour les valeurs commensurables, pour les valeurs incommensurables, pour toutes les valeurs de la variable (²).

3. Aujourd'hui, il y a fonction dès que l'on imagine entre deux variables (ou bien entre une variable et un système de valeurs d'autres variables) une *correspondance telle que, l'une étant déterminée, l'autre ait sa valeur fixée*. Peu importe le procédé par lequel on a établi cette correspondance, et les conséquences

---

(¹) Académie de Berlin, 18 juillet 1872 (WEIERSTRASS, *Œuvres*, t. II, p. 71). La série de Weierstrass a pour expression

$$\sum_{n=0}^{\infty}(b^n \cos a^n x\pi);$$

x est une variable réelle, a un entier impair >1, b une constante positive <1, ab un produit supérieur à un nombre fixe. (*Voir* aussi du BOIS-REYMOND, *J. de Crelle*, t. 79, p. 29. — WIENER, *J. de Crelle*, t. 90, p. 221. — JORDAN, *Analyse*, 2ᵉ édition, t. I, p. 316.)

Celle de Riemann serait

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n^2 x}{n^2}.$$

Cf. aussi du BOIS-REYMOND, *Théorie générale des fonctions* (traduction Milhaud). Il appelle fonctions *orthoïdes* celles qui ont une dérivée. « Ce n'est pas l'anorthoïdie en des points *isolés* qui est un caractère distinctif de la Mathématique moderne, mais l'anorthoïdie *permanente* de certaines fonctions.... Si, aux valeurs d'argument distinctes, on fait correspondre d'une manière convenable des valeurs de fonctions distinctes, il se forme pour la fonction, dans le plus petit intervalle qu'on puisse imaginer, des différences de valeurs qui ne correspondent plus à l'image d'une courbe visible. La première idée d'une pareille correspondance est plutôt due à Lejeune-Dirichlet : il a incidemment recours à une fonction qui prend pour des valeurs rationnelles de l'argument une valeur constante c, et pour les valeurs irrationnelles une autre valeur d. Riemann nous a ensuite enseigné une méthode pour former des fonctions de ce genre : elle consiste à additionner une série de fonctions auxquelles on donne certaines oscillations ou discontinuités de plus en plus fréquentes... » (p. 120).

La fonction de Dirichlet à laquelle il est fait allusion (cf. *J. de Crelle*, t. 4, p. 169) peut être définie par l'égalité

$$y = (c-d)\lim_{n=\infty}\lim_{m=\infty}\cos n!\,\pi x^m + d.$$

(²) *Mémoire sur les fonctions discontinues* (*A. E. N.*, 1875, p. 57; 1879, p. 195. *Voir* aussi une note du n° 20.

analytiques qui en résultent; peu importe même la possibilité de l'établir (¹).

Dès lors, si l'on considère une collection finie ou infinie de grandeurs (pour abréger, on désigne cette collection par le mot d'*ensemble*) et qu'à chaque système de valeurs des éléments on fasse correspondre un nombre, l'ensemble de ces nombres constitue une fonction définie sur l'ensemble considéré.

C'est ainsi qu'avant de traiter des fonctions elles-mêmes, on est conduit à parler des collections d'éléments, auxquelles correspondent les collections de nombres représentant les valeurs de la fonction.

Nous emploierons le langage géométrique, dont nous devons maintenant dire un mot.

4. L'Analyse est redevable à la Géométrie, à la Mécanique et à la Physique de singuliers progrès. Non seulement ces sciences ont indiqué aux analystes des types fondamentaux de problèmes, et par là orienté leurs recherches; mais elles ont aidé à pressentir les solutions, suggéré des méthodes, élargi les horizons, alors que la déduction logique était d'un faible secours pour les découvertes.

Le Calcul infinitésimal a son origine dans des intuitions géométriques et mécaniques : Newton, Leibniz et tout le XVIIIᵉ siècle y ont fait souvent appel. Au XIXᵉ siècle, pour ne citer que trois noms, Monge a été conduit par l'étude des surfaces à des résultats relatifs aux équations aux dérivées partielles des deux premiers ordres. Riemann fait de l'intuition géométrique la base de sa Théorie des fonctions. C'est aussi le caractère de l'œuvre de Sophus Lie : il applique l'intuition géométrique à l'espace, et il augmente la puissance de cette méthode en utilisant l'idée pluckérienne de l'espace généralisé, c'est-à-dire en remplaçant l'espace, ayant pour élément le point, par un espace dont l'élément serait la droite, la sphère, une quadrique (²).

(¹) Sur la distinction entre les correspondances qui sont déterminées et celles qui ne peuvent être écrites, *cf.* TANNERY, *De l'infini mathématique* (*Revue générale des Sciences*, 1897, p. 132).

(²) KLEIN, *Conférences du congrès de Chicago*, 1893 (trad. Laugel, p. 10).

Mais l'intuition n'est pas une démonstration (1). Si une critique trop affinée est un grave obstacle aux découvertes, il faut ensuite ne laisser à l'évidence intuitive que la part indispensable. Aussi dans l'enseignement, on tend de plus en plus à s'appuyer sur une base analytique. Gauss et Abel, Cauchy et Dirichlet, surtout Weierstrass, ont aidé à marcher dans cette voie. L'école de Berlin « ne cherche pas à voir, mais à comprendre » (2).

Au contraire, il n'y a pas d'objection à faire au langage géométrique : c'est une manière d'exprimer des vérités analytiques, et on pourrait le remplacer par des équations et des inégalités. Pour éviter tout malentendu, Gauss a parfois pris sa terminologie dans les sciences biologiques, et M. Poincaré dans la Topographie (3). Mais la métaphore géométrique est plus commode; car des interprétations que l'on peut donner d'une conception analytique, la Géométrie suggère la plus obvie.

Ce langage figuré est concis et clair; il facilite l'interprétation des résultats et rappelle souvent un fait historique relatif à leur découverte. Lorsqu'il y a plus de trois variables, il permet, sans faire d'hypothèse sur la réalité d'un espace ayant plus de trois dimensions, de donner aux théorèmes des énoncés simples; il

---

(1) Une intuition trop rapide a pu occasionner des erreurs. Pour citer l'exemple classique, on était amené à penser que toute fonction continue admet une dérivée, en faisant ce raisonnement : « Un fonction continue peut être représentée par une courbe continue; et une courbe a évidemment une tangente. » Cette prétendue évidence venait de ce qu'on croyait avoir l'idée d'une courbe et d'une droite sans épaisseur, tandis que de fait on voyait un trait et une bande de faible épaisseur. L'intuition montrait que le trait curviligne et la bande rectiligne empiétaient l'un sur l'autre sans se traverser. Si c'est là ce qu'on appelle une *courbe* et une *tangente,* il est clair que toute courbe a une tangente; mais la tangente ainsi définie n'a pas de rapport avec la théorie analytique des fonctions. On peut dire la même chose du cercle osculateur (POINCARÉ, *A. M.,* t. XXII, p. 5. — KLEIN, *Conférences de Chicago,* trad., p. 42). La *continuité* et la *densité,* au sens de la théorie des *ensembles,* sont des propriétés que, par leur nature même, nos sens ne peuvent percevoir.

(2) « De là à l'égard de la Géométrie une certaine méfiance, qui est le caractère propre de l'école de Berlin; pour ainsi dire, elle ne cherche pas à voir, mais à comprendre » (POINCARÉ, *A. M.,* t. XXII, p. 17).

Cf. aussi KLEIN, *Sur l'arithmétization des mathématiques* (*N. A.,* 1897, p. 114).

(3) *Cf.* POINCARÉ, *Courbes définies par une équation différentielle* (*J. M.,* 1881, p. 383).

peut créer des associations d'idées et suggérer des généralisations ([1]).

5. Les premiers exemples de représentation géométrique remontent à Descartes et à Fermat ([2]).

Aux valeurs d'une variable réelle, on fait correspondre les points d'une droite.

Deux variables indépendantes (x, y) pouvant être regardées comme des coordonnées, tout système de leurs valeurs est figuré par un point du plan. Quand les nombres représentant x et y varient d'après certaines lois, le point *se déplace* en décrivant une courbe : la courbe est continue lorsque ses coordonnées s'expriment par des fonctions continues d'un paramètre ([3]).

Un contour est défini par une relation $f(x, y) = 0$, ou des équations

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t).$$

Il est *fermé* si la courbe qui le forme est continue et a tous ses points à distance finie, c'est-à-dire tels que l'on ait

$$x^2 + y^2 < R^2,$$

R étant un nombre fixe ([4]).

Prenons un contour fermé, et supposons la fonction f uniforme et continue, ainsi que ses dérivées partielles. Le contour divise alors le plan en deux régions, dont les points satisfont respectivement aux inégalités $f < 0$ et $f > 0$, telles qu'il soit impossible de

---

([1]) *Cf.* POINCARÉ, *Analysis situs* (*J. E. P.*, 2ᵉ série, 1ᵉʳ Cahier, les premières pages).

([2]) DESCARTES, *Géométrie*. Paris, 1637. — FERMAT, *Varia op. math.* Tolosæ, 1697.

([3]) On rappellera (nᵒˢ 19 et seq.) les définitions relatives à la continuité.

([4]) C'est pour rendre immédiate l'extension de ces définitions à l'espace ou à l'hyperespace, que nous distinguons la courbe du contour. Il suffit de remplacer les mots *courbe, contour, plan* par les mots *courbe* [ou variété à une dimension : $x_1 = \varphi_1(t)$, ..., $x_n = \varphi_n(t)$], *surface* [hypersurface, multiplicité ou variété à $n-1$ dimensions : $f(x_1, \dots, x_n) = 0$], *espace* (hyperespace, continuum, multiplicité ou variété à n dimensions) pour avoir les définitions de surface continue (une surface est continue si l'on peut toujours réunir par une courbe continue, entièrement tracée sur elle, deux points arbitraires), de surface finie, fermée, convexe, de l'intérieur et de l'extérieur d'une surface.

passer de l'une à l'autre sans franchir le contour. On peut toujours disposer du signe de f de façon que l'on ait, en tous les points de l'une de ces régions,

$$f < 0, \qquad x^2 + y^2 < R^2.$$

L'inégalité $f < 0$ définit alors la région (l'aire, le champ, le domaine) *intérieure* au contour; à l'inégalité $f > 0$, correspond la région extérieure, et à l'équation $f = 0$ la *frontière* commune des deux domaines.

Un contour est *convexe* lorsqu'une parallèle à l'un des axes, qui rencontre le contour, le coupe en deux points et en deux points seulement.

Le *voisinage* (l'entourage, le domaine) d'un point est l'ensemble des points dont la distance ([1]) à ce point n'atteint pas un nombre donné à l'avance. (Dans l'espace et l'hyperespace, ce sera l'ensemble des points intérieurs à une sphère ou à une hypersphère.)

La considération d'une variable complexe revient à l'association de deux variables réelles : aussi, on peut parler de variable complexe décrivant un contour, restant à l'intérieur d'un domaine. C'est la représentation classique de Gauss et de Cauchy, introduisant l'affixe d'un point.

6. Le contour qui sert de frontière à un domaine est *simple*, lorsqu'il peut être tracé d'un mouvement continu. Sinon le domaine est à *connexion multiple*.

([1]) La *distance* de deux points $(x_0, y_0, z_0, \ldots; x_1, y_1, z_1, \ldots)$ est définie par l'expression positive

$$\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + \ldots};$$

leur *écart* par

$$|x_0 - x_1| + |y_0 - y_1| + \ldots.$$

Par *voisinage* d'un point, par exemple de l'origine, on entend indifféremment le lieu des points dont les coordonnées vérifient l'une des inégalités

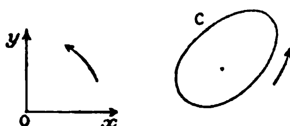
$$x^2 + y^2 < \delta^2, \qquad |x| + |y| < \delta', \qquad |x| < \delta'' \quad \text{et} \quad |y| < \delta'',$$

ou plus généralement l'ensemble des points d'une aire ayant le point à son intérieur. Quand une fonction jouit d'une propriété dans un domaine de l'un de ces types, elle en jouit dans un domaine de l'un des autres types.

Étant données deux demi-droites rectangulaires Ox, Oy, on appelle sens *positif* ou *direct* celui dans lequel il faut tourner pour amener Ox sur Oy par une rotation égale à un angle droit.

Considérons d'abord un contour convexe à connexion simple, tel que C (*fig.* 1) : le *sens positif sur ce contour* sera le sens dans

Fig. 1.

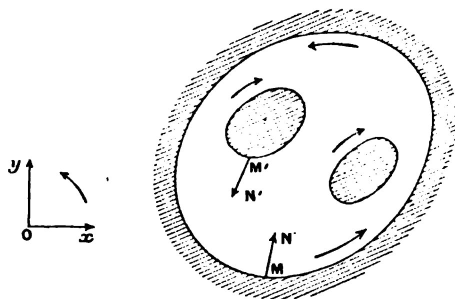


lequel un mobile devra cheminer sur ce contour, pour qu'il paraisse, relativement à un observateur *intérieur* au contour, se mouvoir dans le sens positif.

Avec la disposition des axes ordinairement adoptée, un mobile décrit un contour dans le sens positif, lorsqu'il le parcourt de manière à avoir l'aire entourée à *sa gauche*.

Dans l'aire triplement connexe ([1]), indiquée sur la *fig.* 2, la

Fig. 2.



portion *intérieure* est celle qui n'est pas en hachures. Un mobile

---

([1]) Une surface est *connexe* lorsque deux points pris arbitrairement sur la surface peuvent toujours être réunis par un trait continu situé tout entier sur la surface.

La connexion peut être *simple* ou *multiple*. Une surface connexe est à connexion simple quand ses bords, si elle en a, se composent d'une ligne unique et que tout *circuit* (c'est-à-dire tout contour fermé ne se coupant pas) tracé sur la surface et ne rencontrant pas ses bords peut, par déformation continue sur la

en décrit le contour dans le sens positif quand des observateurs, placés à l'intérieur de l'aire et non loin du contour, voient ce mobile se mouvoir dans le sens positif, au moment où il parcourt les éléments du contour voisin des positions qu'ils occupent. On peut donc dire que le mobile marche dans le sens positif (avec la disposition ordinaire des axes) quand il se déplace de manière à avoir l'aire entourée à sa gauche.

La normale *intérieure* au contour est la direction de la normale $(\overline{MN}, \overline{M'N'})$ qui fait un angle égal à $+\frac{\pi}{2}$ avec la direction positive de la tangente, c'est-à-dire avec celle qui correspond au sens positif adopté pour décrire le contour.

Si l'on a à considérer p variables complexes $z_1, \ldots, z_p$, on les fera se déplacer dans p plans différents, et l'on parlera du champ multiple $\mathcal{A}$, formé par l'ensemble des champs $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_p$.

§ II. — Aperçu de la théorie des ensembles.

7. Que l'on envisage *tous les points* intérieurs aux domaines continus que nous venons de définir, ou que l'on en considère seulement *des infinités,* il faut insister sur les classifications à établir dans les collections de nombres qui leur correspondent, et préciser le sens de locutions que l'on pourrait prendre dans des acceptions bien différentes.

De là, l'étude générale des *collections d'objets déterminés et distincts, en nombre fini ou infini,* c'est-à-dire des ensembles (1).

Comme premiers exemples d'ensembles, citons les suites infinies d'éléments réels $(x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ affectés chacun d'un indice;

---

surface, être réduit à un point. Considérons une surface ayant des bords (par exemple, pour donner des bords à une sphère, il suffit d'y faire une entaille avec des ciseaux; pour donner des bords au plan, il suffit d'y tracer un cercle de rayon très grand). On appelle *coupure* une section faite dans la surface avec des ciseaux et joignant deux points situés sur les bords. Une surface est à connexion simple lorsqu'il est impossible d'y tracer une coupure sans la morceler.

En particulier une aire plane est simplement connexe lorsqu'elle n'a pas de trous. Deux coupures transforment l'aire à triple contour (*fig.* 2) en aire simplement connexe.

(1) Le créateur de cette théorie est M. Georges Cantor [*cf.* divers Mémoires

les nombres rationnels, algébriques, transcendants compris entre o et 1 ; les valeurs d'une fonction $f(x)$ bien déterminée pour toutes les valeurs rationnelles, algébriques ou transcendantes de x appartenant à un intervalle.

Dans ces ensembles, chaque élément a un seul indice ou dépend d'une seule variable réelle. On appelle *ensembles à une dimension* les ensembles de cette nature.

Prenons deux ensembles à une dimension, et faisons correspondre deux à deux leurs éléments, de manière à obtenir des systèmes de valeurs. Les ensembles de ce nouveau type s'appelleront *ensembles à deux dimensions*. Même procédé pour la formation des ensembles à 3, ..., p dimensions.

Ainsi les valeurs d'une fonction $f(x, y)$ correspondant à des systèmes de valeurs (x, y) d'un ensemble à deux dimensions, forment un ensemble à trois dimensions. Les suites infinies, dont les éléments ont chacun p indices, prenant indépendamment les uns des autres une infinité de valeurs entières, constituent des ensembles à p dimensions.

Supposons numériques les éléments de l'ensemble. Chaque système de valeurs des éléments représentera $(p \lesseqgtr 3)$ ou constituera $(p > 3)$ un point d'un espace ayant le même nombre de dimensions que l'ensemble. Ainsi, on parlera des ensembles de points intérieurs à une sphère ou à une hypersphère, et ayant pour coordonnées des nombres rationnels, irrationnels.

8. L'ensemble des nombres rationnels compris entre o et 1, et l'ensemble des nombres irrationnels appartenant au même intervalle, renferment chacun une infinité d'éléments; mais on pressent que l'on a affaire à des infinités bien différentes.

---

publiés depuis 1870 dans le *J. de Crelle* et les *Math. Annalen*. Les premiers sont traduits dans les *A. M.*, t. II, 1883; deux des derniers, plus importants, ont été traduits par M. Marotte (Hermann, 1899)]. — *Cf.* aussi JORDAN, *Analyse*, 2ᵉ édition, t. I, p. 18-28; et *J. M.*, 1892, p. 71. — BOREL, *Leçons sur la théorie des fonctions*. — *Encyklopädie der mathem. Wissensch.*, t. I, p. 184-203, et t. II, p. 45. — Et surtout SCHŒNFLIES, *Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten*, 1900, où l'on trouvera un résumé excellent et très complet de toute la théorie, ainsi que de nombreuses références bibliographiques.

De là l'étude des ensembles au point de vue de la nature du nombre de leurs éléments, de leur *puissance* (¹).

Deux ensembles sont dits *de même puissance* ou *équivalents*, lorsqu'on peut les faire correspondre, élément par élément, d'une manière biunivoque, c'est-à-dire telle qu'à un élément du premier ensemble corresponde un élément du second, et réciproquement.

Considérons l'ensemble formé par la suite des entiers positifs. Un ensemble est dit *de première puissance* ou *dénombrable* lorsqu'il est équivalent à cet ensemble (²).

Comme types d'ensembles dénombrables, signalons :

1° L'ensemble des nombres premiers, des nombres pairs, et généralement tout ensemble infini détaché d'un ensemble dénombrable;

2° L'ensemble formé soit par l'addition d'un ensemble fini à un

---

(¹) La puissance d'un ensemble est la notion générale que l'on obtient par la considération des éléments de l'ensemble, abstraction faite de leur nature et de leur ordre. C'est la généralisation de l'idée que nous nous formons du *nombre* des éléments d'une collection finie : aussi Cantor appelle-t-il la puissance d'un ensemble son *nombre cardinal*.

Cette expression se justifie en montrant que les puissances ont le *caractère de grandeurs*. Étant donnés trois nombres finis m, n, p, on a entre les deux premiers une, et une seulement, des trois relations $m > n$; $m = n$; $m < n$. De plus, les égalités $m = n$, $n = p$, entraînent $m = p$; et des inégalités $m > n$ et $n > p$, on déduit $m > p$. De là, la comparaison possible des grandeurs des nombres finis. C'est la possibilité de la comparaison des valeurs des puissances qu'il faut de même justifier. *Cf.* les Mémoires traduits par M. Marotte, p. 6, et Borel, *Leçons, etc.*, note I, p. 102.

Les ensembles finis sont ceux dont le nombre cardinal est fini : les autres sont dits *transfinis*. Le nombre cardinal de l'ensemble transfini le plus simple, de l'ensemble dénombrable (on l'a appelé *aleph-zéro*), surpasse tout nombre fini, et est le plus petit nombre cardinal transfini.

M. Cantor a emprunté le mot de *puissance* à Steiner, qui s'en servait pour exprimer la correspondance de deux figures géométriques. La notion de *puissance* avait déjà été donnée par Bolzano, dans ses *Paradoxes* sur l'infini.

(²) L'ensemble dénombrable est le plus simple des ensembles infinis; car on peut, de tout ensemble infini, détacher des ensembles partiels dénombrables. (Un ensemble fini n'est équivalent à aucune de ses parties; tout ensemble infini a des parties qui lui sont équivalentes.)

Quand il n'y a pas d'amphibologie à craindre, on appelle *univoques* les correspondances biunivoques.

Parfois aussi, on remplace le mot *représentation* par *application* : alors ce terme (dont on se sert aussi quand il s'agit de la représentation de deux surfaces de Riemann l'une sur l'autre) n'a évidemment pas le même sens qu'en Géométrie infinitésimale.

ensemble dénombrable, soit par la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles finis, soit par la réunion d'un nombre limité d'ensembles dénombrables.

Exemple : Les suites d'éléments à p indices, $\mu_1, \ldots, \mu_p$ prenant toutes les valeurs entières positives et la valeur o. En effet, il y a dans une pareille suite un nombre limité d'éléments pour lesquels $\mu_1 + \ldots + \mu_p = \lambda$, λ étant un entier positif déterminé. Faisons $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$: nous obtenons des groupes de termes; dans chaque groupe, disposons arbitrairement les éléments. Voici tous les termes de la série multiple rangés de manière qu'il soit possible de les faire correspondre d'une manière biunivoque à la suite des nombres entiers positifs ([1]).

3° L'ensemble formé par un ensemble dénombrable d'ensembles dénombrables ([2]).

Exemple : L'ensemble des nombres rationnels ([3]), des nombres algébriques ([4]).

Considérons maintenant l'ensemble formé par la suite continue des nombres compris entre o et 1. *Cet ensemble n'est pas dénombrable* ([5]). On peut donc l'adopter comme type d'ensembles ayant

---

([1]) Parfois, on dit alors que les termes sont *rangés* linéairement (*voir* n° 9).

([2]) Pour la démonstration, *cf.* Cantor, *J. de Crelle,* t. 84, p. 243; 1877. — *A. M.,* t. II, p. 365; 1883.

([3]) On le déduit du théorème énoncé, en rangeant les nombres rationnels de la manière suivante :

$$\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{m}, \ldots\right), \quad \left(\frac{2}{1}, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \ldots, \frac{2}{n}, \ldots\right), \quad \left(\frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{3}{p}, \ldots\right), \quad \ldots.$$

D'après cette loi, chaque nombre rationnel est écrit une fois et une seule fois (on suppose que l'on garde seulement les fractions irréductibles.)

([4]) Cf. *J. de Crelle,* t. 77, p. 258.

([5]) Cf. *A. M.,* t. II, p. 353. — Borel, *Leçons, etc.,* p. 14. — M. Cantor estime (on ne l'a pas démontré) qu'il n'existe pas d'ensemble infini de nombres (ou de points), dont la puissance soit intermédiaire entre celle des ensembles dénombrables et celle des ensembles ayant la puissance du continu. Il y aurait alors seulement deux ensembles infinis de nombres : l'ensemble continu serait de *deuxième* puissance.

Par contre, on peut *définir,* sinon *concevoir,* des ensembles dont la puissance surpasse celle du continu. *Exemple :* l'ensemble des fonctions d'une ou de plusieurs variables réelles [l'ensemble des fonctions continues ou des fonctions analytiques d'une variable réelle a seulement la puissance du continu, car ces fonctions sont déterminées par une infinité dénombrable de conditions (n° 15)]. M. Cantor a même montré comment déduire de la définition d'un ensemble celle d'un ensemble de puissance supérieure (Borel, *Leçons. etc.,* p. 107).

une puissance différente de celle des ensembles dénombrables. On dira qu'*un ensemble a la puissance du continu, s'il est de même puissance que la suite des nombres compris entre* o *et* 1.

Cet ensemble type une fois déterminé, on en constitue d'autres de même puissance par les procédés suivants :

1° En supprimant un ensemble dénombrable dans un ensemble ayant la puissance du continu. Ainsi en enlevant de l'ensemble $0 \overline{\gtrless} x \overline{\gtrless} 1$ les nombres rationnels et les nombres algébriques, l'ensemble restant, c'est-à-dire l'ensemble formé par les nombres transcendants, a la puissance du continu ([1]).

2° En réunissant une infinité dénombrable d'ensembles ayant la puissance du continu, ou même une infinité, ayant la puissance du continu, d'ensembles ayant la puissance du continu ([2]). Ainsi, l'ensemble des points intérieurs à un carré a même puissance que l'ensemble des points formant le côté du carré, ou que l'ensemble des points compris entre o et 1.

9. Un ensemble fini ou infini étant donné, on en peut disposer les éléments dans un certain ordre, et cela de bien des manières.

([1]) A ce propos, M. Cantor fait remarquer que l'on peut enlever d'un espace continu un ensemble dénombrable de points, sans que le mouvement continu dans l'espace ainsi modifié devienne impossible (*M. A.*, t. XX, p. 121).

([2]) Cantor, *A. M.*, t. II, p. 315, ou mieux *M. A.*, t. XLVI, p. 488. — Borel, *Leçons, etc.*, p. 17. — On montre d'abord que l'on peut faire correspondre, d'une façon univoque, un ensemble continu à n dimensions à un ensemble continu d'une dimension : dès lors deux ensembles continus ayant respectivement p et q dimensions sont de même puissance. A ce point de vue, la notion de dimension disparaît.

Dans la correspondance d'ensembles ayant un nombre différent de dimensions ainsi entendue, on fait abstraction de la *continuité* de la correspondance entre deux ensembles continus : à deux points voisins du premier ensemble ne correspondent pas nécessairement deux points voisins du second. Mais pour certains ensembles, même de dimensions différentes, des correspondances *continues* sont possibles, comme l'a montré M. Peano. Il a formé deux fonctions $\varphi(t)$ et $\psi(t)$, *continues* $0 \overline{\gtrless} t \overline{\gtrless} 1$, telles que le point $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ puisse venir coïncider, pour une valeur convenable de t, avec tel point que l'on veut de la surface d'un carré de côté 1 construit sur Ox et Oy (Peano, *M. A.*, t. XXXVI, p. 157; M. Hilbert, *M. A.*, t. XXXVIII, p. 459, en donne un exemple plus simple).

Les fonctions continues φ et ψ ainsi formées ne peuvent avoir de dérivées; sinon la courbe décrite par le point t serait rectifiable, ce qui est absurde.

Ainsi, par cette voie, on a des exemples simples de fonctions continues sans dérivée. Ils montrent du reste que les correspondances effectuées par le moyen des fonctions ordinairement étudiées conservent le nombre des dimensions.

Par exemple l'ensemble des entiers positifs peut s'écrire (1, 2, 3,...) ou bien (1, 4, 7, ...; 2, 5, 8, ...; 3, 6, 9, ...), etc.; les nombres rationnels peuvent être rangés suivant l'ordre des valeurs croissantes, ou bien d'après la loi indiquée au numéro précédent, etc.

Un ensemble est dit *ordonné* lorsqu'on a fixé une loi spécifiant, de deux éléments quelconques de l'ensemble, lequel est l'antérieur et lequel est le postérieur, cette spécification étant telle que, si a est antérieur à b, et b à c, a soit aussi antérieur à c.

Dans un ensemble ordonné, il n'y a pas forcément un premier et un dernier élément, comme le montre la considération de l'ensemble formé par tous les entiers.

Soient E et E_1 deux ensembles *équivalents*, tous deux *ordonnés;* supposons établie entre leurs éléments (a, b, ...; a_1, b_1, ...) une correspondance *biunivoque*. Ces ensembles sont dits *semblablement ordonnés* ou *semblables* lorsque l'hypothèse a antérieur à b entraîne a_1 antérieur à b_1.

Un ensemble est dit *bien ordonné* lorsqu'il est ordonné, et ordonné de telle façon que l'ensemble, ainsi que chacune de ses parties, renferme un élément antérieur à tous les autres.

Dans son ordre naturel, l'ensemble des entiers positifs est bien ordonné; le continu ne l'est pas, car l'ensemble partiel formé par les nombres compris entre deux nombres a et b (a exclu) n'a pas de premier élément [1].

Le rangement dans un certain ordre des termes d'un ensemble *fini* donne la conception du nombre ordinal habituel. M. Cantor regarde les lois de rangement des éléments d'un ensemble infini comme conduisant à la généralisation de la notion de nombre ordinal : il les désigne par le nom de *type ordinal.*

Le type ordinal d'un ensemble ordonné est la notion générale qui résulte de la considération des éléments de cet ensemble, abstraction faite de leur nature, mais non de leur ordre de succession [2].

---

[1] Une question intéressante serait de savoir s'il est possible de ranger l'ensemble des nombres dans un ordre tel qu'il soit *bien ordonné*, c'est-à-dire si le continu peut être envisagé comme bien ordonné (*cf.* HILBERT, *Göttingen Nachrichten*, 1900).

[2] Si l'on faisait aussi abstraction de l'*ordre* de succession, on aurait le nombre *cardinal* de l'ensemble.

Deux ensembles semblables ont le même type ordinal, et réciproquement : il représente la loi commune de rangement des deux ensembles (¹).

A chaque type ordinal d'un ensemble infini bien ordonné correspond ce que l'on a appelé un *nombre ordinal transfini*.

Le type ordinal *le plus simple* correspond au placement des entiers positifs dans leur ordre naturel (²). M. Cantor désigne par ω le nombre ordinal correspondant.

Le type ordinal d'un ensemble infini ordonné n'est pas changé, lorsqu'on fait *précéder* ses éléments des éléments d'un ensemble fini, ou lorsqu'on lui associe un autre ensemble infini ordonné, de même type ordinal, de telle manière qu'il y ait alternativement un élément du premier ensemble, un élément du second, et ainsi de suite. Au contraire il est modifié lorsqu'on fait *suivre* ses éléments des éléments d'un ensemble fini; ou bien lorsqu'on écrit successivement les éléments de chaque ensemble infini (³).

10. La conception de puissance, comme celle de type ordinal, fait abstraction de la nature des éléments de l'ensemble et de leur

---

(¹) Un ensemble *fini* est semblable à lui-même, et par suite a même type ordinal, quelle que soit la manière dont on l'ordonne. Aussi, pour un tel ensemble, le type ordinal dépend uniquement du nombre cardinal : on peut donc se servir des mêmes notations, des mêmes chiffres pour représenter le nombre cardinal d'un ensemble fini et le nombre ordinal correspondant à son type ordinal.

Au contraire, pour les ensembles *infinis*, à un nombre cardinal unique correspondent une infinité de types ordinaux, et dès lors de nombres ordinaux.

(²) Pour la démonstration de ce théorème, *cf.* CANTOR, *M. A.*, t. XLIX (trad. Marotte, p. 63). — ω est donc le nombre ordinal transfini le plus simple; il correspond à l'ensemble infini le plus simple et le plus simplement rangé.

L'ensemble des entiers positifs rangé dans l'un des ordres $(1, 3, 5, \ldots; 2, 4, \ldots)$, $(1, 4, 7, \ldots; 2, 5, 8, \ldots; 3, 6, 9, \ldots)$, ... aurait pour nombre ordinal $\omega + \omega$, $\omega + \omega + \omega$, ... (on écrira $\omega.2$, $\omega.3$, ...). D'où plus généralement les symboles $\omega^2 + \omega.\lambda + \mu$, ω^3, ..., λ, μ désignant des nombres finis : ils représentent les nombres transfinis ordinaux de M. Cantor.

(³) Étant donnés deux ensembles bien ordonnés E et E_1, de nombres ordinaux ε et ε_1, ou bien ils sont semblables ($\varepsilon = \varepsilon_1$), ou bien l'un est semblable à un *segment* de l'autre.

De même un ensemble partiel détaché d'un ensemble bien ordonné est semblable à cet ensemble ou à un segment de cet ensemble.

Ces remarques permettent de définir un nombre ordinal *supérieur* à un autre (on dira que ε surpasse ε_1, si E_1 est semblable à un segment de E) et de montrer que les nombres ordinaux ont le *caractère de grandeurs*.

représentation concrète sous forme déterminée : aussi l'on s'élève à ces notions, qu'on envisage l'ensemble au point de vue arithmétique ou au point de vue géométrique.

Si l'on fait correspondre à l'ensemble des régions d'un espace continu, et *si l'on suppose les éléments de l'ensemble représentés par des points,* on pourra se placer dans leur étude à un troisième point de vue et introduire le *point limite.*

Une suite infinie d'éléments réels $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ *tend vers une limite* ξ, lorsque à tout nombre positif donné ε, on peut faire correspondre un entier N tel que l'on ait $|x_n - \xi| < \varepsilon$ pour toute valeur de n supérieure à N [1].

Soient m et n deux entiers supérieurs à N. Des inégalités

$$|x_m - \xi| < \varepsilon, \qquad |x_n - \xi| < \varepsilon,$$

on déduit

$$|x_m - x_n| < 2\varepsilon;$$

donc à partir d'un certain rang, la différence de deux termes quelconques de la suite tend vers zéro.

La réciproque est vraie : une suite converge vers une limite lorsque à tout nombre positif donné ε, on peut faire correspondre un entier N tel que, pour toute valeur de m et de n supérieure à N, on ait $|x_m - x_n| < \varepsilon$ [2].

Une suite est dite *convergente,* lorsqu'elle tend ainsi vers une limite finie; *proprement divergente* lorsque, ses termes gardant

---

[1] De même, les éléments d'une suite augmentent indéfiniment, lorsque à tout nombre donné E, si grand soit-il, on peut faire correspondre un nombre N tel que l'on ait $|x_n| > E$, pour $n > N$.

[2] Pour démontrer cette réciproque, considérons une suite arbitraire de quantités positives décroissantes $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ tendant vers zéro; soient $N_1, N_2, N_3, \ldots$ les nombres qui leur correspondent en vertu des hypothèses. (On peut s'arranger de façon qu'ils aillent toujours en croissant.)

En particulier, pour tous les nombres ν compris entre N_1 et N_2, on pourra écrire $|x_n - x_\nu| < \varepsilon_1$, c'est-à-dire $x_\nu - \varepsilon_1 < x_n < x_\nu + \varepsilon_1$, et cela pour toute valeur de n supérieure à N_1. Si nous appelons respectivement a_1 et b_1 la plus grande et la plus petite des quantités $x_\nu - \varepsilon_1$, $x_\nu + \varepsilon_1$, quand ν prend toutes les valeurs comprises entre N_1 et N_2, on aura

$$a_1 < x_n < b_1$$

pour toute valeur de n supérieure à N_1.

De même pour tous les nombres ν compris entre N_2 et N_3, et pour toute valeur

le même signe, leurs valeurs absolues croissent indéfiniment; *improprement divergente,* lorsqu'elle n'est ni convergente, ni proprement divergente.

Donnons une représentation géométrique à la suite en en portant les éléments sur une droite à partir d'une origine fixe. A la limite ξ correspondra un point qui aura dans tout voisinage une infinité de points de la suite. On l'appelle *point limite.*

Si, d'une suite dont les termes sont rangés dans un certain ordre, on passe à un ensemble quelconque à une dimension, on dira que ses éléments x ont *un point limite* ξ, lorsqu'on peut satisfaire à l'inégalité $|x - \xi| < \varepsilon$, si petit que soit ε, pour une infinité d'éléments de l'ensemble. Ainsi l'ensemble

$$\frac{1}{2}, \quad 1+\frac{1}{2}, \quad 2, \quad \frac{1}{3}, \quad 1+\frac{1}{3}, \quad 2, \quad \frac{1}{4}, \quad 1+\frac{1}{4}, \quad 2, \quad \ldots$$

a les *deux* points limites 0 et 1.

De même un point (ξ, η) est point limite d'un ensemble à deux dimensions, si l'on peut satisfaire à l'inégalité

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 < \varepsilon^2,$$

quelle que soit la quantité positive ε, pour des systèmes de valeurs (x, y) correspondant à une infinité de points de l'ensemble.

En résumé, quel que soit le nombre des dimensions, un point, appartenant ou non à l'ensemble, est point limite si, dans tout voisinage de ce point, il y a des points de l'ensemble.

---

de n supérieure à N_2, on aura

$$x_\nu - \varepsilon_2 < x_n < x_\nu + \varepsilon_2,$$

c'est-à-dire

$$a_2 < x_n < b_2,$$

en représentant par a_2 et b_2 la plus grande et la plus petite des quantités a_1, $x_\nu - \varepsilon_2$; b_1, $x_\nu + \varepsilon_2$ (ν parcourant les valeurs entre N_2 et N_3).

On définira par le même procédé des nombres a_3, a_4, ...; b_3, b_4, ...; de là deux suites a_1, a_2, ...; b_1, b_2, ... qui sont respectivement croissantes ou stationnaires, décroissantes ou stationnaires. Un terme quelconque de la première est inférieur à un terme quelconque de la seconde; car si un terme a_k surpassait b_l, il surpasserait les termes x_n à partir d'une certaine valeur de n. Enfin la différence entre deux termes correspondants (a_i, b_i) des deux suites est inférieure à $2\varepsilon_i$, c'est-à-dire tend vers zéro.

Les deux suites a et b définissent donc un nombre ξ; et ce nombre est une limite pour la suite x_0, x_1, ..., x_n, ...

Tout point d'un ensemble qui n'est pas point limite est dit *point isolé :* le point isolé est donc un point de l'ensemble qui n'a dans son voisinage aucun point de l'ensemble. Ainsi tous les points de l'ensemble $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right)$ sont isolés, et l'ensemble a l'origine pour point limite. Dans l'ensemble $a \leqq x \leqq b$ tous les points sont points limites.

L'existence des points limites résulte de ce théorème, démontré par Weierstrass :

Un ensemble infini, contenu dans une portion finie du plan, admet au moins un point limite (¹).

En effet, désignons par A et B ($A < B$) des nombres fixes, entre lesquels les coordonnées des points de l'ensemble demeurent comprises; ces points seront tous intérieurs à un carré Q_0 dont les côtés sont parallèles aux axes et ont pour longueur $B - A$.

Divisons ce carré en quatre carrés égaux. Dans l'un d'entre eux Q_1 (ou sur ses côtés), il y aura une infinité de points de l'ensemble. Si l'on partage ce carré en quatre autres, il y aura au moins un nouveau carré Q_2 contenant, à son intérieur ou sur ses côtés, une infinité de points de l'ensemble, et ainsi de suite pour des carrés $Q_3, \dots, Q_n$; les côtés de ce dernier carré ont pour longueur $\frac{B - A}{2^n}$.

Désignons par $p_0, p_1, \dots, p_n$ des points arbitraires de l'ensemble, situés respectivement dans les carrés $Q_0, Q_1, \dots, Q_n$; leurs coordonnées (et dès lors les points eux-mêmes) tendent vers des limites bien déterminées. En effet, soient a_n et b_n les abscisses des sommets du carré Q_n. Les deux suites (a, b) telles que

$$a_0 \leqq a_1 \leqq \dots \leqq a_n \leqq \dots, \qquad \dots b_n \leqq b_{n-1} \leqq \dots \leqq b_0$$

$\left(\text{avec la condition } b_n - a_n = \frac{B - A}{2^n}\right)$ définissent un nombre :

(¹) C'est pour fixer les idées que nous prenons un ensemble à deux dimensions. Le principe de ce théorème se trouve dans les Œuvres de Bolzano (on l'appelle souvent *loi de Bolzano-Weierstrass*), de Lagrange, de Dirichlet, de Cauchy (*cf.* CANTOR, *M. A.*, t. XXIII, p. 455; 1884).

regardons-le comme l'abscisse d'un point dont l'ordonnée sera déterminée par deux suites analogues.

Ce point est un point limite puisque, d'après la manière dont ses coordonnées ont été définies, il renferme dans son voisinage une infinité de points de l'ensemble.

11. Les points limites d'un ensemble E forment un nouvel ensemble; on l'appelle *ensemble dérivé,* et on le représente par E'. Cet ensemble dérivé peut à son tour contenir une infinité de points, et dès lors avoir un dérivé. On le représentera par E''; et ainsi de suite.

L'ensemble est dit *de première espèce* lorsqu'il a un nombre *limité* de dérivés successifs. Un ensemble de première espèce est *du $n^{ième}$ ordre* lorsque c'est son dérivé $n^{ième}$, E^n, qui se réduit ainsi à un nombre limité de points (1).

Par exemple, l'ensemble des nombres rationnels compris entre 0 et 1 a pour dérivé l'ensemble des nombres $0 \leqq x \leqq 1$. Ce second ensemble coïncide avec son dérivé.

Les relations d'un ensemble avec son dérivé ont conduit aux classifications suivantes :

Tout point d'un ensemble est un point isolé ou un point limite; donc si l'on représente par E_i et E_l l'ensemble des points isolés

---

(1) *Cf.* Cantor, *M. A.*, t. V, p. 128.

Exemple : Désignons par P l'ensemble $\left(\dots, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{2}, 1\right)$: il a zéro pour point limite. Dans chaque intervalle $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ (et à droite du point 1), insérons un ensemble *semblable* à P et qui ait $\frac{1}{n+1}$ (et 1) pour point limite. On forme ainsi un ensemble Q dont le premier dérivé est P, et le second dérivé se réduit au point zéro.

Dans chaque intervalle $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ insérons un ensemble *semblable* à Q et ayant pour points limites tous les points de Q situés dans l'intervalle : soit R l'ensemble ainsi défini. On a

$$R' = Q, \qquad R'' = P;$$

R''' se réduit au point zéro.

En poursuivant d'après cette loi, on formera des ensembles de tel ordre que l'on voudra.

On réalise facilement des fonctions ayant pour zéros les points d'ensembles

d'un ensemble E, et l'ensemble des points limites de E qui font partie de E, on a

$$E_i + E_l = E.$$

Cela posé, on appelle :

1° *Ensemble isolé,* celui dont tous les points sont isolés ($E_l = 0$).

2° *Ensemble relativement parfait* (*complet, fermé,* gesschlossene), celui dont chacun des points limites appartient à l'ensemble, c'est-à-dire celui *qui contient son dérivé* ($E_l = E'$).

Ainsi, l'ensemble

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right)$$

est isolé; il devient relativement parfait si l'on y ajoute l'origine.

3° *Ensemble dense en soi* (in sich dicht), celui dont tous les points sont points limites ($E_i = 0$) : *il est contenu dans son dérivé.*

Exemple : Les nombres rationnels compris dans un intervalle forment un ensemble dense en soi.

4° *Ensemble parfait,* celui qui coïncide avec son dérivé, c'est-à-dire est à la fois relativement parfait et dense en soi [1] ($E = E' = E_l$).

---

semblables aux ensembles P, Q, R, ... Ainsi les fonctions

$$\sin\frac{1}{x}, \quad \sin\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}, \quad \sin\frac{1}{\sin\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}}, \quad \ldots,$$

jouissent de cette propriété (*cf.* Du Bois-Reymond, *J. de Crelle,* t. 79, p. 37).

Pour les ensembles P, Q, ..., l'origine est dite *point limite* du premier ordre, du second ordre, etc.

M. Mittag-Leffler a donné (*A. M.,* t. IV, p. 58) des exemples simples d'ensembles *d'espèce supérieure.* Ainsi l'ensemble isolé formé par les nombres

$$\frac{1}{2^{\mu}} + \frac{1}{2^{\mu+m_1}} + \ldots + \frac{1}{2^{\mu+m_1+\ldots+m_\mu}},$$

où les quantités μ, $m_1, \ldots, m_\mu$ parcourent toute la série des nombres entiers positifs, a des dérivés de tous les ordres (*cf.* aussi Cantor, *M. A.,* t. XVII, p. 356).

Les théorèmes de M. Mittag-Leffler (*C. R.,* 1882, 1er semestre; *A. M.,* t. IV) permettent la représentation analytique des fonctions uniformes ayant des discontinuités formant des ensembles isolés des types ci-dessus.

[1] C'est le sens adopté par M. Cantor. M. Jordan appelle *ensembles parfaits* les ensembles relativement parfaits définis ci-dessus, aussi bien que les ensembles parfaits. Au point de vue pratique, les deux définitions ne diffèrent pas profon-

Le continu présente l'exemple le plus simple d'ensemble parfait.

Des deux ensembles $a \leqq x \leqq b$; $a < x < b$, le premier est parfait, le second ne l'est pas, puisque son dérivé en contient tous les points, et de plus les points a et b.

Étudions maintenant la situation des points d'un ensemble E relativement à un domaine $\mathcal{D}$.

Un ensemble E est *partout dense* (überall dicht) dans un domaine $\mathcal{D}$, lorsqu'il y a des points de l'ensemble dans tout domaine, si petit soit-il, contenu dans $\mathcal{D}$: dans ce cas, l'ensemble dérivé renferme tous les points de $\mathcal{D}$. Un ensemble partout dense est dense en soi; la réciproque n'est pas vraie. Les points d'un intervalle dont l'abscisse est un nombre rationnel forment un ensemble partout dense : il n'est pas parfait ([1]).

Un ensemble E *n'est dense nulle part* dans $\mathcal{D}$, lorsqu'il n'y a aucune portion de $\mathcal{D}$ dans laquelle l'ensemble E soit partout dense.

---

dément. car un ensemble relativement parfait ne diffère de son dérivé que par une infinité dénombrable de points (*cf.* BOREL, *Leçons, etc.*, p. 36).

Un ensemble dénombrable n'est jamais parfait (CANTOR, *M. A.*, t. XXIII, p. 459); un ensemble parfait a la puissance du continu (CANTOR, *A. M.*, t. IV, p. 381); un ensemble fermé est dénombrable ou a la puissance du continu. Un ensemble isolé et un ensemble fermé dont le dérivé est dénombrable sont dénombrables.

([1]) Réciproquement, *un ensemble fermé peut n'être dense nulle part.*

Exemple : A chaque nombre rationnel $\frac{p}{q}$ compris dans l'intervalle (o, 1) associons l'intervalle

$$\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^3}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^3}\right).$$

D'où, une infinité dénombrable d'intervalles : soit $\mathcal{C}$ l'ensemble formé par les points de ces intervalles. La théorie des fractions continues apprend qu'il existe des nombres irrationnels ξ non compris dans ces intervalles, c'est-à-dire tels que

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^3} \qquad \text{quel que soit} \qquad \frac{p}{q}.$$

Soit E leur ensemble :

1° E *est fermé;* car si un point de E' n'appartenait pas à E, ce point serait intérieur à $\mathcal{C}$ (sans coïncider avec les extrémités des intervalles formant $\mathcal{C}$), et par suite $\mathcal{C}$ contiendrait des points de E, ce qui n'a pas lieu;

2° E *n'est dense dans aucun intervalle,* car tout intervalle contient des points dont l'abscisse est rationnelle, par suite des points n'appartenant pas à E, ce qui serait absurde si E était partout dense dans cet intervalle, puisque E est fermé.

Dès lors il y a des ensembles *parfaits* jouissant de la même propriété, car tout ensemble fermé non dénombrable (et E n'est pas dénombrable) se décompose en un ensemble dénombrable et en un ensemble parfait.

Cf. BOREL, *Leçons, etc.*, p. 39. — BENDIXSON, *A. M.*, t. II, p. 416. — CANTOR, *A. M.*, t. IV, p. 381. — HADAMARD, *J. M.*, 1898, p. 69. — BAIRE, *Thèse* (1899), p. 38.

Enfin, pour traiter de l'intégrabilité des fonctions et de leur développement en séries de Fourier, on utilise une notion relative à l'*étendue* d'un ensemble.

Soit, pour simplifier, un ensemble linéaire. Il est *discret, de longueur nulle, résoluble,* ou *non étendu* dans un intervalle (discret, inhaltslos, unausgedehnt, integrirbar), lorsqu'il est possible d'enfermer ses points dans des intervalles partiels de somme inférieure à toute quantité donnée ([1]).

L'ensemble des points

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^3, \quad \ldots, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad \ldots$$

est non étendu. En effet, on peut les répartir en deux catégories : l'une contient les points avoisinant l'origine, et l'intervalle qui les renferme est aussi petit que l'on veut; l'autre n'a plus qu'un nombre fini de points ([2]).

([1]) Pour ces définitions, *cf.* HARNACK, *M. A.*, t. XIX, p. 238 (quelques points ont dû être rectifiés); *M. A.*, t. XXIV, p. 218, et *B. D.*, 1882, p. 242. — DE LA VALLÉE-POUSSIN, *J. M.*, 1892, p. 423. Par ensemble *inétendu*, Hankel entendait un ensemble dense nulle part : cette définition est trop large, car si un ensemble discret n'est dense nulle part, la réciproque n'est pas vraie (Harnack en donne un exemple, *M. A.*, t. XIX, p. 239).

Cf. *Encyklopädie der Math. Wissenschaften*, t. I, p. 200 et note 71 (article de Schönflies); t. II, p. 39 et notes 205, 208, 209 (article de Pringsheim), p. 69 et note 107 (article de Voss). Voici du reste comment M. G. Cantor conçoit l'*étendue* (Inhalt) d'un ensemble fermé E, placé dans un espace à n dimensions (notion qui sert de fondement à la théorie des intégrales multiples) :

De chaque point de E, comme centre, décrivons des sphères, toutes de même rayon r : leur ensemble limite une portion d'espace qui diminue quand r décroît. Par suite, quand r tend vers zéro, cet espace a une limite positive ou nulle : *cette limite définit l'étendue de l'ensemble* E (*M. A.*, t. XXI, p. 54). M. Jordan donne de l'étendue une définition applicable aux ensembles fermés ou non, en distinguant l'étendue intérieure et l'étendue extérieure (*J. M.*, 1892, p. 77).

([2]) Les ensembles de première espèce sont tous discrets. Ainsi l'ensemble de première espèce et du second ordre

$$1, \ \frac{1}{2}, \ \left(\frac{1}{2}\right)^2, \ \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2, \ \left(\frac{1}{2}\right)^3, \ \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^3, \ \left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3, \ \left(\frac{1}{2}\right)^4, \ \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^4, \ \ldots$$

est discret. Son dérivé est

$$0, \quad \frac{1}{2}, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^3, \quad \ldots,$$

dont le dérivé se réduit à un point. La réciproque n'est pas vraie : tous les ensembles discrets ne sont pas de première espèce. Plus généralement, l'étendue d'un ensemble est égale à celle de son dérivé; par suite, un ensemble dont le dérivé est dénombrable a une étendue nulle.

12. Un ensemble d'une dimension est *borné* (*fini, limité*) lorsque ses éléments demeurent compris entre deux nombres fixes. Dans le cas contraire, il est *illimité*.

Un ensemble borné à une dimension admet une limite supérieure et une limite inférieure. Par limite *supérieure* L d'un ensemble, on entend un nombre jouissant des deux propriétés suivantes : 1° L est supérieur ou égal à l'un quelconque des éléments de l'ensemble; 2° tout nombre plus petit que L est inférieur à l'un au moins des éléments de l'ensemble ([1]).

Un ensemble quelconque est *borné,* lorsqu'il est borné suivant chaque dimension, c'est-à-dire lorsque les coordonnées de ses points restent comprises entre des nombres fixes. Les points du plan intérieurs à tout contour fermé constituent un ensemble *borné;* les points extérieurs un ensemble *illimité.*

Désignons par E un ensemble ne renfermant pas tous les points possibles : les points qui n'appartiennent pas à cet ensemble forment un second ensemble, que je représente par $\mathcal{E}$. On appelle

---

([1]) Ce théorème revient à dire qu'*un ensemble borné à une dimension a deux points frontières.* (On a déjà vu qu'un ensemble borné infini a au moins un point limite.) En voici la démonstration :

Soit b un nombre fixe supérieur à tous les éléments de l'ensemble, et a un nombre inférieur à l'un au moins de ces éléments. Intercalons un moyen arithmétique entre a et b. Des trois nombres a, $\frac{a+b}{2}$, b, il y en a au moins un qui est supérieur ou égal à tous les éléments de l'ensemble. Je désigne par b_1 le nombre ou le plus petit des deux nombres qui jouissent de cette propriété, et j'appelle a_1 celui qui est immédiatement inférieur à b_1. Le nombre a_1 sera, comme a, inférieur à l'un au moins des éléments de l'ensemble.

Du système $(a_1 b_1)$, déduisons $(a_2 b_2)$, comme on a déduit $(a_1 b_1)$ de (ab). En répétant l'opération, on forme deux suites de nombres

$$a \overline{\overline{<}} a_1 \overline{\overline{<}} a_2 \overline{\overline{<}} \ldots \overline{\overline{<}} a_n \overline{\overline{<}} \ldots, \qquad \ldots b_n \overline{\overline{<}} b_{n-1} < \ldots < b \qquad \left(b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}\right),$$

telles que chaque nombre a_n est inférieur à l'un au moins des éléments de l'ensemble, et chaque nombre b_n supérieur ou égal à tous les éléments.

Ces deux suites définissent un nombre L. Ce nombre n'est inférieur à aucun élément de l'ensemble; car tout élément qui surpasserait L surpasserait aussi l'un des termes b_n, puisque b_n a pour limite L. De même, il y a toujours au moins un élément supérieur à $L - \varepsilon$, ε étant choisi arbitrairement, puisqu'il y en a toujours un qui surpasse a_n, et que a_n ayant pour limite L peut en différer d'une quantité inférieure à ε.

On établirait de la même manière l'existence d'une limite inférieure l. En raisonnant par l'absurde, on voit que ces limites L et l sont uniques.

frontière commune des ensembles E et $\mathcal{E}$ l'ensemble formé par les points qui appartiennent à la fois à l'un des ensembles et au dérivé de l'autre. Ainsi un point frontière de E (et dès lors de $\mathcal{E}$), s'il appartient à E (à $\mathcal{E}$), a dans tout voisinage au moins un point de $\mathcal{E}$ (de E). Quand tous les points d'un ensemble ne sont pas points frontières, on peut définir l'*intérieur* de l'ensemble. Ce sont les points dont l'entourage appartient à l'ensemble. Chaque point intérieur à l'ensemble E est extérieur à l'ensemble $\mathcal{E}$ (1).

13. Un ensemble borné est *d'un seul tenant* lorsqu'il est relativement parfait et que l'on peut échelonner, entre deux points arbitraires de l'ensemble, une suite finie de points appartenant à l'ensemble, tels que la distance de deux points consécutifs soit inférieure à tout nombre donné (2).

Cette notion précise celle de domaine continu. Un champ, par exemple, à deux dimensions constitue un *continuum* (3) composé d'une seule pièce, lorsque, étant donnés deux points du champ, l'un fixe (on le prendra à l'infini si le voisinage du point à l'infini

---

(1) Le point *limite* diffère du point *frontière*. Le point limite n'est en même temps point frontière que s'il n'est pas intérieur à l'ensemble : inversement, un point isolé est un point frontière sans être un point limite.

Ainsi tout point de l'ensemble $x^2+y^2 \leqq 1$ est point limite; les points de la circonférence de rayon 1 sont de plus points frontières. Dans l'ensemble

$$\left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right),$$

l'origine est point limite et point frontière. Dans l'ensemble formé par la suite des entiers, chaque point est point frontière sans être point limite. Dans l'ensemble formé par les points à coordonnées rationnelles, tous les points sont points frontières : il n'y a ni points intérieurs, ni points extérieurs à l'ensemble.

(2) C'est le sens de M. Jordan (*Analyse*, 2e édition, t. I, p. 24 et 51). — M. Cantor appelle domaine *zusammenhängend* et M. Burckhard domaine *in sich überall dicht* le domaine dans lequel on peut échelonner, entre deux points arbitraires du domaine, etc. (comme ci-dessus). — Ce que M. Jordan définit domaine *d'un seul tenant,* M. Cantor l'appelle *zusammenhängend + abgeschlossen,* M. Burkhardt *zusammenhängend.* — M. Cantor appelle *continu* le domaine *perfekt zusammenhängend* et *semicontinuum* le domaine *zusammenhängend nicht perfekt.* Le domaine *zusammenhängend + abgeschlossen = kontinuierlich* (et par suite *perfekt*).

(3) *Cf.* WEIERSTRASS, *Œuvres,* t. II, p. 203. — MITTAG-LEFFLER, *A. M.,* t. IV, p. 2.

appartient au champ), l'autre quelconque variable, on peut échelonner entre ces deux points un nombre fini de points, tels que l'entourage de l'un quelconque d'entre eux appartienne tout entier au champ et renferme le point suivant ([1]).

§ III. — Types de fonctions.

14. Après ces considérations sur les ensembles, revenons à l'étude des fonctions ou de la correspondance de deux ensembles.

On représente géométriquement la dépendance entre deux variables complexes, z et w, en considérant simultanément deux plans, et en posant

$$z = x + iy, \qquad w = u + iv, \qquad u = u(x, y), \qquad v = v(x, y).$$

Ces relations définissent la *représentation* du plan z sur le plan w. Soient A et $\mathcal{A}$ deux aires qui ainsi se correspondent.

La représentation de A sur $\mathcal{A}$ est *continue* lorsque la distance de deux points images tend vers zéro, en même temps que la distance des deux points à représenter.

Elle est *biunivoque* lorsqu'à tout point de A correspond un point de $\mathcal{A}$ et un seul, et réciproquement.

Elle est *conforme* ou *isogonale* lorsque deux courbes C et C' de l'un des plans se coupent sous le même angle que leurs courbes images Γ et Γ' : la similitude des figures infiniment petites est ainsi conservée.

La représentation conforme est *directe* lorsque le sens dans

---

([1]) On peut répartir les ensembles à deux dimensions en ensembles continus (superficiels ou linéaires) et ensembles ponctuels. Soient une aire $\mathcal{A}$ et un ensemble E de points intérieurs à $\mathcal{A}$. L'ensemble E divise $\mathcal{A}$ en domaines distincts, s'il existe deux points de $\mathcal{A}$ tels qu'il soit impossible de passer de l'un à l'autre, en restant à l'intérieur de $\mathcal{A}$, sans rencontrer de points de E. L'ensemble E sera ponctuel s'il n'existe pas d'aire intérieure à $\mathcal{A}$ que l'ensemble E puisse décomposer en domaines distincts.

Dans un ensemble ponctuel, un point peut : 1° être isolé; 2° avoir dans son voisinage une infinité de points isolés; 3° ne pas être isolé et n'avoir dans un voisinage, formé par un cercle de rayon assez petit, aucun point isolé (*cf.* Painlevé, *Théorie analytique des équations différentielles*, p. 434).

Un ensemble ponctuel peut être parfait (*cf.* Bendixson, *A. M.*, t. II, p. 417 : on y trouvera un exemple d'ensemble parfait, d'une dimension, dont aucun point n'est isolé, et qui néanmoins ne remplit nulle part un segment de droite).

lequel il faut tourner pour passer de C à C′ est le même que pour passer de Γ à Γ′ : dans le cas contraire, elle est *inverse*. Par exemple, la transformation par rayons vecteurs réciproques est une transformation conforme inverse.

Envisageons maintenant un espace à n dimensions. On peut encore parler de point, de ligne, de surface et généralement de multiplicité ou d'ensemble à p dimensions ($p \lesseqgtr n$).

Dans cet espace, soit une fonction, définie sur un ensemble E, ayant en chaque point de cet ensemble un nombre limité de valeurs : ces valeurs forment un ensemble $\mathcal{E}$. On peut regarder la définition de la fonction comme figurant la *représentation* ou l'*application* de l'ensemble E sur l'ensemble $\mathcal{E}$ [1].

15. Dans ce qui précède, la notion de fonction s'est trouvée dégagée de toute hypothèse étrangère à celle de *détermination*.

De l'infinie variété de fonctions qu'il est ainsi possible de concevoir, on pourra, d'une infinité de manières, détacher des catégories intéressantes. Ce choix dépendra des recherches que l'on poursuit.

Considérons les fonctions d'une variable *réelle*. On pourra étudier successivement [2] :

1° Les fonctions discontinues dont les discontinuités ne forment pas un ensemble discret (n° **11**).

Exemple : La fonction considérée par Dirichlet, qui est nulle pour chaque valeur rationnelle de la variable, et égale à 1 pour chaque valeur irrationnelle (n° **2**).

2° Les fonctions intégrables (n° **161**).

---

(1) Soient $p_1, \ldots, p_n, \ldots$ des points de E ayant pour point limite un point p; $q_1, \ldots, q_q, \ldots$ les points correspondants de $\mathcal{E}$, supposons qu'ils aient q pour point limite. La représentation de l'ensemble E sur l'ensemble $\mathcal{E}$ est dite *continue*, si chacun des points limites p a pour correspondant q.

Quand un ensemble fermé (ou parfait) E a une représentation finie et continue $\mathcal{E}$, cet ensemble $\mathcal{E}$ est lui-même fermé (ou parfait).

Si la représentation des ensembles E et $\mathcal{E}$ est biunivoque, et si $\mathcal{E}$ est une représentation continue de E, réciproquement E est une représentation continue de $\mathcal{E}$.

(2) *Cf.* Du Bois-Reymond, *Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen* (*J. de Crelle*, t. 79, p. 21).

3° Les fonctions qui satisfont aux conditions de Dirichlet, et dès lors sont développables en séries trigonométriques (n° 84).

4° Les fonctions uniformes et continues : elles sont représentables par des séries de polynomes, absolument et uniformément convergentes, comme l'a montré Weierstrass ([1]). Pour les déterminer dans un intervalle, il suffit de donner leurs valeurs aux points rationnels de l'intervalle (n° 19).

5° Les fonctions uniformes et continues qui ont une dérivée; celles qui ont des dérivées de tous les ordres, toutes finies, et dès lors continues.

Ces dernières se rangent en deux classes. *Les unes sont analytiques,* c'est-à-dire développables dans le voisinage de chaque point en séries de Taylor. *Les autres ne sont pas analytiques :* on peut leur donner pour expression analytique la somme d'une série de Taylor et d'une série de Fourier, comme l'a montré M. Borel ([2]).

([1]) WEIERSTRASS, *J. M.*, 1886 (traduction Laugel). — *Cf.* aussi les démonstrations plus simples données par M. Picard (*Analyse,* 2e édition, t. I, p. 275), par M. Lebesgue (*B. D.,* 1898, p. 278), par M. Mittag-Leffler (*R. del Circolo di Palermo,* 1900, p. 217). — Ce théorème s'étend aux fonctions de *plusieurs* variables *continues* dans un domaine : elles sont représentables en séries de polynomes.

De même, toute fonction continue dans un intervalle, *sauf pour un ensemble dénombrable de valeurs de la variable,* est développable dans cet intervalle en série de polynomes, absolument et uniformément convergente dans tout intervalle où n'existe pas de point de discontinuité (LEBESGUE, *loc. cit.*).

En traitant des fonctions discontinues développables en séries de fonctions continues, M. Baire a prouvé que pour qu'une fonction d'une variable soit représentable par une série de polynomes il faut et il suffit qu'elle soit au plus ponctuellement discontinue dans tout ensemble parfait (*C. R.,* 1898, 1er semestre, p. 884, et *Thèse,* p. 62) et M. Lebesgue a démontré simplement le même théorème pour les fonctions de plusieurs variables (*C. R.,* 1899, 1er semestre, p. 811).

([2]) De même, une fonction de *plusieurs* variables réelles, *continue dans un domaine et admettant des dérivées partielles de tous les ordres,* est développable en une série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}_n(x_1, \ldots, x_r, \sin x_1, \cos x_1, \ldots, \cos x_r)$$

(P_n désignant un polynome en $x_1, \ldots, \cos x_r$), série uniformément convergente et dérivable terme à terme indéfiniment. — *Cf.* BOREL, *A. E. N.,* 1895, p. 35. — PAINLEVÉ, *C. R.,* 1898, 1er semestre, p. 385. — PRINGSHEIM, *M. A.*, t. XLIV, et *Chicago Congress Papers,* p. 294. — *Voir* aussi la Note n° 177.

On pourra classifier les fonctions d'après les équations auxquelles elles satisfont, et s'occuper spécialement des solutions des équations différentielles algébriques.

A un autre point de vue, on pourra ranger les fonctions d'après les représentations dont elles sont susceptibles (séries entières, séries de polynomes, séries trigonométriques, etc.) (¹) ou, pour préciser, de la manière suivante (²) :

Dans une première classe, dite *classe zéro*, on place les fonctions continues $f(x)$: nous venons de dire qu'elles sont développables en séries de polynomes.

Une série de fonctions de classe 0, si elle ne détermine pas une fonction de classe 0, *définira une fonction de classe* 1 : la classe 1 comprend donc les fonctions discontinues $F(x)$, représentables par des séries de fonctions continues, et l'on aura

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x).$$

De même, quand une série de fonctions de classe 1 ne détermine pas une fonction de classe 0 ou 1, la fonction qu'elle définit sera dite *de classe* 2. Les fonctions $\mathfrak{F}(x)$ de classe 2 sont donc représentables par des séries doubles à éléments continus

$$\mathfrak{F}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} F_m(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_{m,n}(x),$$

telles que la sommation relative aux valeurs n doive précéder celle relative aux valeurs m.

Exemple : La fonction considérée plus haut, qui est nulle pour chaque valeur rationnelle de la variable, et égale à 1 pour chaque valeur irrationnelle.

On peut poursuivre, et définir ainsi des *fonctions de classe arbitraire* qui seront représentées par des séries triples, qua-

(¹) *Cf.* les Notes précédentes et les nᵒˢ 66, 83, 188, etc.

(²) C'est une classification donnée par M. Baire (*C. R.*, 1898, et *Thèse*, p. 68. *Voir* aussi *C. R.*, 1899, 2ᵉ semestre, p. 946 et 1010).

druples, etc., dont les éléments seront des fonctions continues ou des polynomes.

En partant du nombre des conditions nécessaires pour déterminer une fonction dans un intervalle, on opposera les fonctions définies par une infinité dénombrable de conditions (par exemple, les fonctions continues, les fonctions discontinues seulement en une infinité dénombrable de points) aux fonctions discontinues en général [1]. Parmi les premières, on pourra ranger à part celles qui sont déterminées par leurs valeurs dans un intervalle aussi petit que l'on veut (les fonctions analytiques de variable réelle ou complexe).

Dans cet Ouvrage, nous avons à traiter spécialement des *fonctions analytiques d'une variable complexe*. C'est l'étude des phénomènes naturels et la commodité des calculs qui ont amené, en restreignant la notion de fonction, à faire ces hypothèses complémentaires d'où est sortie la théorie des fonctions analytiques. Leur domaine embrasse les fonctions les plus intéressantes dans toutes les branches des Mathématiques : Théorie des nombres, Théorie des équations différentielles, Géométrie, Physique mathématique.

Aborder leur étude par les procédés de Cauchy revient à envisager les fonctions qui sont finies, continues, monogènes, ainsi que leurs dérivées.

Les notions correspondantes se présentent aussi lorsqu'on se place au point de vue de Riemann.

Les méthodes de Weierstrass reposent sur les propriétés des séries entières, ce qui exige l'idée de limite, de continuité, de convergence, de convergence uniforme.

Aussi est-il bon d'en grouper ici les définitions précises en les appliquant aux fonctions.

---

[1] *Exemple :* Soient $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ des nombres donnés; une fonction égale à $\frac{1}{n}$ pour $x = x_n$, et nulle en tous les autres points, a une infinité dénombrable de discontinuités. Les fonctions à variation bornée de M. Jordan (n° 162) appartiennent à cette catégorie. — Pour cette classification, *cf.* Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, p. 110 et 123 (et Thèse, *A. E. N.*, 1895, p. 47).

SECTION II.

LES FONCTIONS ANALYTIQUES.

§ I. — Fonctions continues.

16. Une fonction de variable complexe, $f(z)$, définie dans le voisinage d'un point z_0, converge en z_0 vers une limite l, si à tout nombre positif donné ε on peut faire correspondre un nombre positif δ, tel que l'on ait, pour toute valeur $0 < |h| < \delta$,

$$|f(z_0+h) - l| < \varepsilon.$$

Ainsi une fonction peut ne pas être définie en un point, bien qu'elle ait en ce point une limite déterminée ([1]). Si elle est définie en un point, la valeur limite de la fonction peut ne pas être égale à la valeur de la fonction à la limite ([2]).

La définition ci-dessus peut être modifiée et appliquée à un ensemble de valeurs ne renfermant pas tout le voisinage de z_0. On dira, par exemple, qu'en un point x_0, une fonction $f(x)$ converge vers une limite l, pour l'ensemble des valeurs réelles de la variable supérieures à x_0, lorsque à tout nombre positif ε on peut faire

---

([1]) La fraction $\frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0}$ a pour limite $2z_0$ au point z_0 : sans convention complémentaire, par exemple relative à la continuité, elle n'est pas définie au point z_0.

Les fonctions $e^{-\frac{1}{x^2}}$, $x \sin \frac{1}{x}$ (x réel) tendent vers zéro avec x, et ne sont pas définies pour $x = 0$.

$e^{\frac{1}{z}}$ non seulement n'est pas déterminé pour $z = 0$, mais il est impossible de définir *par continuité* sa valeur à l'origine, puisque l'on obtient à l'origine telle valeur que l'on veut, quand z tend vers zéro par un chemin convenable.

([2]) Cette remarque est évidente si l'on prend des fonctions définies par correspondance de valeurs : la Note suivante en donnera des exemples pour des fonctions définies par une expression analytique unique.

correspondre un nombre positif δ tel que

$$|f(x_0+h)-l|<\varepsilon \qquad (h \text{ réel}; 0<h<\delta) \quad (^1).$$

Dans ce sens plus général, en un point z_0, une fonction peut avoir plusieurs limites, qui dépendent du chemin suivi par le point z_0+h pour tendre vers z_0.

Une fonction $f(z)$ augmente indéfiniment pour $z=z_0$, lorsque son inverse tend vers zéro. C'est dire qu'à tout nombre positif donné E, si grand soit-il, on peut faire correspondre un nombre positif δ, tel que l'on ait

$$|f(z_0+h)|>E, \qquad 0<|h|<\delta.$$

On écrira de même $f(\infty)=l$, $f(\infty)=\infty$, si l'on peut satisfaire aux inégalités

$$|f(z)-l|<\varepsilon, \qquad |f(z)|>E.$$

ε et E sont choisis arbitrairement; z doit pouvoir prendre une valeur quelconque de module supérieur à un nombre fixe.

---

(1) Ainsi la fonction $e^{\frac{1}{x}}$ tend vers zéro ou augmente indéfiniment, suivant que x tend vers zéro par des valeurs positives ou négatives.

De là, la distinction entre les valeurs limites de la fonction *à droite* et *à gauche* d'un point x_0, ou encore entre les limites *postérieure* et *supérieure* (notion qui sera généralisée au n° 20). Dirichlet les désignait par $f(x_0+0)$, $f(x_0-0)$; $f(x_0)$ représentait la valeur de la fonction au point x_0 [$f(-0)$, $f(0)$, $f(+0)$ s'il s'agit de l'origine].

1° On peut avoir $f(x_0+0)=f(x_0-0)\lesseqgtr f(x_0)$.

Exemples : Soient

$$\varphi(x)=\lim_{n=\infty}\frac{1}{(1+x^2)^n}, \qquad \psi(x)=\lim_{n=\infty}\frac{nx^2}{nx^2+1},$$

on a

$$\varphi(0)=1, \qquad \varphi(\pm 0)=0, \qquad \psi(0)=0, \qquad \psi(\pm 0)=1.$$

2° On peut avoir

$$f(x_0-0)\gtrless f(x_0)=f(x_0+0),$$

ou réciproquement.

Exemples : Soient

$$\varphi(x)=x\lim_{n=\infty}\frac{nx^n-1}{nx^n+1}, \qquad \psi(x)=x\lim_{n=\infty}\frac{x^n-n}{x^n+n},$$

on a

$$\varphi(1-0)=-1, \quad \varphi(1)=\varphi(1+0)=1, \quad \psi(1-0)=\psi(1)=-1; \quad \psi(1+0)=1.$$

3° On peut avoir $f(x_0-0)\gtrless f(x_0+0)$, et $f(x_0)$ non défini en x_0 (cf. *Encyklopädie*, t. II, p. 16).

17. Une fonction $f(x)$ *finie et déterminée* en chaque point d'un intervalle fermé, peut ne pas être *finie dans l'intervalle*, c'est-à-dire ne pas rester comprise entre deux nombres fixes.

Ainsi la fonction $f(x) = \lim\limits_{n=\infty} \frac{nx}{nx^2+1}$, qui est égale à $\frac{1}{x}$ quand x est différent de zéro, et à zéro quand x est nul, est finie et déterminée en tout point de l'intervalle $(-1, +1)$; et elle peut dans cet intervalle dépasser tout nombre donné.

Mais si la fonction reste, dans l'intervalle, comprise entre deux nombres fixes, elle a une limite supérieure et une limite inférieure finies (p. 26).

Aussi Weierstrass, en précisant les notions de limites supérieure et inférieure, a distingué plusieurs cas :

a. La fonction est bien déterminée dans l'intervalle et a pour limites supérieure et inférieure des nombres finis (nous les désignerons par L et l).

b. La fonction est bien déterminée dans l'intervalle sans avoir de limite finie. Alors les symboles $+\infty$ et $-\infty$ peuvent être considérés comme limites supérieure et inférieure de la fonction.

Lorsque les limites supérieure et inférieure sont finies, *et sont effectivement atteintes en un point de l'intervalle,* elles prennent le nom de *maximum* et de *minimum* [1].

18. *Convergence uniforme vers une limite.* — Soit $F(x, y; \xi, \eta)$ une fonction où les variables (x, y) (ξ, η) jouent des rôles diffé-

---

[1] Déjà Gauss avait remarqué qu'une fonction peut avoir des limites supérieure et inférieure finies sans avoir ni maximum ni minimum (*Œuvres*, t. III, p. 10) : *Ex suppositione* X *obtinere posse valorem* S, *neque vero valorem* U, *nondum sequitur inter* S *et* U *necessario valorem* T *jacere, quem* X *attingere, sed non superare possit. Superest alius casus : scilicet fieri posset ut inter* S *et* U *limes situs sit, ad quem accedere quidem quam prope velis possit* X, *ipsum vero nihilominus nunquam attingere.*

Donnons, comme exemple, la fonction $(1-x^2)\lim\limits_{n=\infty}\frac{(1+x)^n-1}{(1+x)^n+1}$ dans l'intervalle $(-1, +1)$.

Elle est nulle pour $x=-1$; quand x augmente, elle décroît; elle tend vers -1, quand x tend vers zéro. Elle est nulle pour $x=+1$; quand x diminue, elle croît; elle tend vers $+1$, quand x tend vers zéro. Pour $x=0$, elle est nulle. Ainsi la fonction a pour limites supérieure et inférieure $+1$ et -1; dans le voisinage de l'origine, elle peut s'en approcher autant que l'on veut sans les atteindre.

rents : on la suppose définie aux points (x, y) d'un domaine fermé $\mathfrak{D}$, quand les paramètres (ξ, η) tendent vers un système de valeurs (ξ_0, η_0).

Cette fonction converge, en un point (x, y), vers la limite $f(x, y)$, si à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un nombre positif δ, tel que l'on ait

$$|F(x, y; \xi, \eta) - f(x, y)| < \varepsilon \qquad (|\xi - \xi_0| < \delta; |\eta - \eta_0| < \delta).$$

Elle converge uniformément vers sa limite, dans le domaine $\mathfrak{D}$, si dans tout le domaine on peut satisfaire à ces inégalités *pour une même valeur* δ_1 de δ [1].

Cette définition s'applique quels que soient le nombre des dimensions du domaine et le nombre des paramètres ξ, η, ... [2].

De même une fonction de variables complexes $F(z, \zeta)$ converge uniformément, dans un domaine fermé (z), vers une limite $f(z)$, pour une valeur ζ, si l'on peut satisfaire aux inégalités

$$|F(z, \zeta + h) - f(z)| < \varepsilon, \qquad |h| < \delta_1;$$

δ_1 est seulement fonction de ε, et est indépendant de la valeur z considérée dans le domaine.

19. *Continuité.* — Une fonction réelle de plusieurs variables réelles, définie en un point $(x, y, \ldots)$ [3] et dans un domaine

---

[1] A chaque point (x, y) de $\mathfrak{D}$ correspondent une infinité de nombres positifs δ; soit $\Delta(x, y)$ le plus grand d'entre eux. L'ensemble de tous ces nombres positifs Δ, relatifs à tous les points de $\mathfrak{D}$, a une limite inférieure δ_1 *positive* ou *nulle*. La convergence est uniforme quand cette limite est *positive*.

[2] Ainsi dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq 1$ la fonction $\dfrac{1}{x+h}$ ne converge pas uniformément vers $\dfrac{1}{x}$, quand h tend vers 0.

Dans le même intervalle, les fonctions $\dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$, $\dfrac{n^2x}{1+n^3x^2}$ ne convergent pas uniformément vers leur limite 0 pour $n = +\infty$.

En effet, si petite que soit une valeur fixe ξ adoptée pour x, et si grand que soit un nombre N, il y a toujours une valeur n $(n > N)$ pour laquelle la première fonction prend la valeur 1, pour laquelle la seconde dépasse tout nombre assigné, et cela pour une valeur de x inférieure à ξ.

Du reste, dans les fonctions considérées en général, c'est la convergence non uniforme qui est le cas ordinaire.

[3] Ainsi la fonction $\dfrac{x^2 - x_0^2}{x - x_0}$ n'est pas continue au point x_0, car en ce point elle n'est pas déterminée.

continu comprenant au moins une partie du voisinage de ce point, est *continue en ce point,* si à tout nombre positif donné ε on peut faire correspondre un nombre positif δ, tel que l'on ait

$$(1)\quad |f(x+h, y+k, \ldots)-f(x, y, \ldots)|<\varepsilon \qquad (|h|<\delta;\ |k|<\delta, \ldots),$$

les points $(x+h, y+k, \ldots)$ ne devant pas sortir du champ où la fonction est définie.

Une fonction est *continue dans un domaine* quand elle est continue en tout point du domaine et de sa frontière ([1]).

Occupons-nous d'abord des fonctions continues *d'une* variable.

Si une pareille fonction est continue dans un intervalle (ab), on peut écrire, en prenant les notations de Dirichlet,

$$f(x \pm 0) = f(x) \qquad (a<x<b);$$
$$f(a+0) = f(a), \qquad f(b-0) = f(b).$$

La fonction est déterminée dans tout l'intervalle dès qu'on connaît ses valeurs *aux points rationnels* de l'intervalle ([2]). En effet, tout point x peut être considéré comme point limite d'un ensemble de points rationnels x_{ρ_n}, et la continuité exige

$$\lim_{n=\infty} f(x_{\rho_n}) = f(x).$$

Appelons *oscillation* de la fonction *dans un intervalle* $(x-\delta, x+\delta)$ la différence entre les valeurs maxima et minima de la fonction dans cet intervalle, et *oscillation en un point* la limite de cette oscillation quand δ tend vers zéro.

Une fonction continue dans un intervalle a en tout point une oscillation nulle; et réciproquement.

Une fonction qui n'est pas continue est appelée *discon-*

([1]) Plus généralement, soient une fonction définie sur un ensemble *parfait* (ou *fermé*) continu *ou non;* $p_1, \ldots, p_n, \ldots$ des points de cet ensemble ayant pour point limite un point p. La fonction est continue en p, lorsque ses valeurs aux points $p_1, \ldots, p_n, \ldots$ tendent vers une limite qui coïncide avec sa valeur en p.

([2]) Plus généralement, une fonction continue est déterminée dans un ensemble E, quand on connaît ses valeurs en tous les points d'un ensemble $\mathcal{E}$ partout dense relativement à E.

tinue [1]. Une catégorie intéressante est celle des fonctions discontinues intégrables [2].

Théorème. — *Lorsqu'une fonction est continue dans un intervalle, à tout nombre positif donné* ε *on peut faire correspondre une division de l'intervalle en parties assez petites*

---

[1] L'oscillation en un point représente le *degré de discontinuité* de la fonction en ce point. Ce degré est infini en un point x, si la fonction est illimitée dans l'intervalle $(x-\delta, x+\delta)$, quel que soit δ.

Plus généralement, soient E un ensemble linéaire *parfait,* continu ou non, et une fonction définie dans cet ensemble. Trois cas seulement sont possibles :

1° En tout point de E, l'oscillation est nulle. La fonction est dite *continue* relativement à l'ensemble E.

2° La fonction n'est pas continue dans E, mais dans tout intervalle contenant des points de E il y a des points de E pour lesquels l'oscillation est nulle. La fonction est dite *ponctuellement discontinue* relativement à E.

3° Au moins dans un intervalle contenant des points de E à son intérieur, il n'y a aucun de ces points pour lequel l'oscillation est nulle. La fonction est dite *totalement discontinue* relativement à E.

Cf. Baire, *Comptes rendus,* 1898, 1er semestre, p. 885.

[2] Ce sont celles dont les discontinuités forment un ensemble discret (nos 11 et 161). En voici un exemple donné par Riemann (*Œuvres,* trad., p. 243).

Désignons par (x) la fonction qui représente la différence entre x et l'entier le plus voisin; comme cette définition ne déterminerait pas (x) pour les valeurs à égale distance de deux entiers consécutifs, convenons de plus qu'en ces points $(x) = 0$.

Ainsi aux points $\frac{2k+1}{2}$, (x) est discontinu, et l'on a

$$(x-0) = \frac{1}{2}, \qquad (x) = 0, \qquad (x+0) = -\frac{1}{2}.$$

Formons la série

$$f(x) = \frac{(x)}{1} + \frac{(2x)}{2^2} + \ldots + \frac{(nx)}{n^2} + \ldots.$$

Chaque terme (nx) est continu, sauf aux points $\frac{2k+1}{2n}$; la série converge uniformément; donc (n° 66) la série est continue sauf aux points $\frac{2k+1}{2n}$. En ces points

$$f(x+0) = f(x) - \frac{1}{2n^2}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25}\cdots\right) = f(x) - \frac{\pi^2}{16n^2},$$

$$f(x-0) = f(x) + \frac{1}{2n^2}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25}\cdots\right) = f(x) + \frac{\pi^2}{16n^2};$$

$f(x)$ est donc discontinu pour toute valeur rationnelle de x qui, réduite à sa plus simple expression, est égale à une fraction de dénominateur pair, et par suite un nombre infini de fois dans tout intervalle. Mais ces discontinuités forment un ensemble non étendu : la fonction est intégrable.

pour que, dans chacune d'elles, l'oscillation de la fonction soit inférieure à ε.

Raisonnons par l'absurde. Si le théorème n'est pas vrai et que l'on divise l'intervalle (ab) en deux parties égales, chacune de ces parties en deux autres, etc., parmi les intervalles obtenus après p opérations, il y en a au moins un $(a_p\, b_p)$ où l'oscillation dépasse ε, et tel que, dans cet intervalle, il y ait au moins un intervalle $(a_{p+1}\, b_{p+1})$ où l'oscillation dépasse ε; dans celui-ci, au moins un intervalle jouissant de la même propriété, et ainsi de suite. Ces intervalles tendent vers o, et *chacun d'eux est renfermé dans tous ceux qui le précèdent.* Il existe donc deux suites

$$a \lesseqgtr a_1 \lesseqgtr a_2 \lesseqgtr \ldots \lesseqgtr a_n \lesseqgtr \ldots, \qquad \ldots b_n \lesseqgtr b_{n-1} \lesseqgtr \ldots \lesseqgtr b_1 \lesseqgtr b$$
$$\left(b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}\right)$$

qui définissent un nombre x_0, différant aussi peu que l'on veut des nombres a_n, b_n qui le comprennent : ces suites sont telles que dans chaque intervalle $(a_n\, b_n)$ l'oscillation dépasse ε.

La fonction étant continue au point x_0, on peut faire correspondre au nombre donné ε un nombre δ tel que l'on ait

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (|x - x_0| < \delta).$$

Par ailleurs n peut être choisi assez grand pour que les deux points a_n et b_n soient compris dans l'intervalle $(-\delta + x_0, x_0 + \delta)$.

Désignons alors par x' et x'' deux valeurs quelconques de x appartenant à l'intervalle $(a_n\, b_n)$. On pourra écrire

$$|f(x') - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad |f(x'') - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

et par suite

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Cette dernière conséquence est en contradiction avec l'hypothèse d'après laquelle, dans l'intervalle $(a_n\, b_n)$, l'oscillation devait dépasser ε [1].

---

(1) *Cf.* DARBOUX, *A. E. N.*, 1875, p. 73.

Rappelons les principales propriétés des fonctions continues :

1° *Une fonction, continue dans un intervalle, qui en deux points* α, β *de*

20. Une fonction qui a une dérivée *finie,* en tout point d'un intervalle, est *continue* dans cet intervalle.

La réciproque n'est pas vraie : une fonction continue peut, en

---

cet intervalle prend des valeurs de signes contraires, s'annule au moins une fois entre α *et* β.

En effet, appuyons-nous sur ce que, d'après la définition de la continuité, une fonction, positive en un point, reste positive dans le voisinage de ce point.

Supposons $f(\alpha) < 0$, $f(\beta) > 0$ et faisons croître x à partir de α. La fonction $f(x)$, négative au point α, est négative dans le voisinage de α; lorsque x croît, l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ demeure négatif est limité supérieurement, puisque $f(\beta)$ est positif (p. 26). Appelons λ la limite supérieure de cet ensemble.

$f(\lambda)$ ne peut être positif, puisque, pour des valeurs de x inférieures à λ, mais aussi voisines de λ que l'on veut, $f(x)$ est négatif.

$f(\lambda)$ ne peut être négatif : sinon $f(x)$ serait négatif dans le voisinage de λ et dès lors pour des valeurs de x supérieures à λ; par suite λ ne serait pas la limite supérieure annoncée.

Donc $f(\lambda)$ est nul.

On en conclut qu'une fonction continue $f(x)$ ne peut passer d'une valeur $f(\alpha)$ à une autre $f(\beta)$ sans passer par toute valeur intermédiaire C. En effet, la fonction $f(x) - C$ prend des valeurs de signes contraires aux points α et β; donc elle s'annule au moins une fois entre ces points.

2° *Une fonction, continue dans un intervalle fermé* (ab), *est* LIMITÉE (*finie, bornée*) *dans cet intervalle,* et a par suite (p. 26) des limites supérieure et inférieure *finies.*

En effet, imaginons une division de l'intervalle (ab) en intervalles $(x_i x_{i+1})$ assez petits pour que, dans chacun d'eux, l'oscillation de la fonction reste inférieure à un nombre donné à l'avance ε. Il suffit d'établir qu'aux limites des intervalles, c'est-à-dire aux points $(a, x_1, \ldots, x_i, \ldots, b)$, les valeurs de la fonction ne dépassent pas un nombre fixe, puisque les valeurs de la fonction ne s'écartent pas des valeurs en question d'une quantité supérieure à ε. Or on a

$$\begin{aligned} |f(x_1)| &< |f(a)| + \varepsilon, \\ |f(x_2)| &< |f(x_1)| + \varepsilon, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ |f(b)| &< |f(x_{n-1})| + \varepsilon. \end{aligned}$$

En ajoutant membre à membre ces inégalités de même sens, on voit que les valeurs absolues de la fonction, aux extrémités des intervalles, restent inférieures à $|f(a)| + n\varepsilon$, n désignant le nombre des divisions.

3° *Une fonction continue dans un intervalle fermé* (ab) ATTEINT, *dans l'intervalle, ses limites supérieure et inférieure* L *et* l.

Prouvons, par exemple, l'existence du maximum. Si l'on divise (ab) en deux

un nombre fini ou infini de points, ne pas avoir de dérivée déterminée, et même n'en avoir en aucun point [1].

La notion de continuité n'entraînant pas celle de l'existence d'une dérivée, certaines recherches ont conduit à élargir la notion

---

parties égales, dans l'une au moins la limite supérieure de $f(x)$ sera L. En répétant l'opération du partage, on obtient des intervalles (ab), $(a_1 b_1)$, ..., $(a_n b_n)$, ... renfermés les uns dans les autres, tels que, dans chacun d'eux, la limite supérieure de $f(x)$ soit L, et deux suites

$$a \overline{\overline{<}} a_1 \overline{\overline{<}} \ldots \overline{\overline{<}} a_n \overline{\overline{<}} \ldots, \qquad \ldots b_n \overline{\overline{>}} b_{n-1} \overline{\overline{>}} \ldots \overline{\overline{>}} b \qquad \left(b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} = \delta\right)$$

qui définissent un nombre x_0 appartenant, quel que soit n, à l'intervalle $(a_n b_n)$. Prouvons par l'absurde que $f(x_0) = \mathrm{L}$.

D'abord, d'après la définition de L, $f(x_0)$ ne surpasse pas L.

S'il lui est inférieur, posons $\mathrm{L} - f(x_0) = 2\varepsilon$. Puisque $f(x)$ est continu en x_0, on peut faire correspondre au nombre positif ε un nombre positif δ_1, tel que

$$|f(x_0+h) - f(x_0)| < \varepsilon \qquad (|h| < \delta_1),$$

ce qui donne, pour toute valeur de $|h|$ inférieure à δ_1,

$$f(x_0+h) < \mathrm{L} - \varepsilon.$$

Mais L étant la limite supérieure de $f(x)$ dans l'intervalle $(a_n b_n)$, il y a au moins un point de cet intervalle (représentons-le par $x_0 + h$), où $f(x_0+h)$ et L diffèrent d'une quantité inférieure à ε. On a ainsi

$$f(x_0+h) > \mathrm{L} - \varepsilon$$

en un point où $|h| < \delta$. Ce résultat est en contradiction avec les premières inégalités; car on peut concevoir d'abord la détermination de ε, en déduire δ_1, et pousser assez loin la subdivision de l'intervalle (ab) pour que δ soit inférieur à δ_1.

Le premier de ces théorèmes a été établi par Cauchy (*Cours d'Analyse, Œuvres*, 2e série, t. III, p. 278). Gauss et surtout Weierstrass ont attiré l'attention sur la nécessité de démontrer les autres. — *Cf.* aussi Darboux, *B. D.*, 1872, p. 307. — Du Bois-Reymond, *Théorie des fonctions*, trad. française, p. 191. — Broden, *Theorie der stetigen Functionen* (*J. de Crelle*, t. 118). — Dini, *Fundamenti per la teorica delle Funzioni di variabili reali*. — Stolz, *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik. Differential und Integralrechnung.*

[1] Pour les exemples, *voir* p. 5 et 16.

Cf. aussi Darboux, *A. E. N.*, 1875, p. 107. On y trouvera également un exemple de fonction continue, qui n'est ni croissante, ni décroissante (p. 106), un exemple de fonction discontinue qui ne peut varier d'une valeur à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires (p. 109). Cette propriété des fonctions continues ne les caractérise donc pas.

de dérivée, de façon à la rendre applicable à toutes les fonctions, continues ou non, bien définies dans le voisinage d'un point.

Pour y parvenir, généralisons d'abord la notion de *limite*.

Soit une fonction définie à droite d'un point x, jusqu'à un point $x+h$. L'ensemble des valeurs de la fonction dans l'intervalle

$$(x+h', x+h) \qquad (0 < h' \lesseqgtr h)$$

a des limites supérieure et inférieure L_h et l_h. Quand h diminue, les L_h ne croissent jamais, et les l_h ne diminuent jamais : donc, quand h tend vers zéro, ces limites supérieure et inférieure ont des limites L_d et l_d. On les appelle limites *supérieure* et *inférieure* de la fonction *à droite* du point considéré.

Définition analogue pour les *limites supérieure* et *inférieure à gauche*.

Cela posé, soit $f(x)$ une fonction définie à droite d'un point x. Les deux limites supérieure et inférieure (à droite) de la fonction

$$\varphi(h') = \frac{f(x+h')-f(x)}{h'} \qquad (0 < h' \lesseqgtr h)$$

sont appelées *dérivées supérieure* et *inférieure* de la fonction *à droite* du point considéré. On obtient de même les *dérivées supérieure* et *inférieure à gauche*.

Toute fonction bien définie a ainsi en chaque point *quatre dérivées*, finies ou infinies, distinctes ou égales.

Quand les deux premières coïncident, la fonction a *une dérivée à droite;* quand les quatre dérivées sont égales, la fonction a *une dérivée* [1].

21. Une fonction de plusieurs variables peut être continue *séparément* par rapport à chacune d'elles sans être continue [2].

---

[1] Cette notion est due à du Bois-Reymond, Dini, Scheeffer (*A. M.*, t. V, p. 52). Elle n'exige pas que le domaine avoisinant le point x, dans lequel la fonction est définie, soit *continu*.

On peut montrer que si les quatre dérivées sont finies, la fonction est continue; que si l'une des quatre dérivées est continue, la fonction a une dérivée.

Pour les applications, *voir* n° 161.

[2] Cauchy se contentait de la continuité par rapport à chaque variable [*Cours d'Analyse, etc.* (*Œuvres*, 2e série, t. III, p. 46)]. Le premier, Heine

Une fonction continue de plusieurs variables jouit des mêmes propriétés que les fonctions continues d'une variable. Démontrons la plus importante en prenant le cas de deux variables.

THÉORÈME. — *Lorsqu'une fonction est continue dans une aire, à tout nombre positif donné* ε *on peut faire correspondre un mode de division de l'aire en éléments assez petits pour que, dans chacun d'eux, l'oscillation de la fonction reste inférieure à* ε.

Raisonnons encore par l'absurde. Décomposons l'aire en carrés par des parallèles aux axes. Si le théorème n'est pas exact, il y aura toujours, aussi loin que nous poussions les subdivisions, une suite de carrés dans lesquels l'oscillation de la fonction dépassera ε, et par suite un point limite (x_0, y_0) (on déterminera ses coordonnées en raisonnant comme au n° 19), dans le voisinage duquel l'oscillation dépassera ε. Cette conséquence est en contradiction avec l'hypothèse de la continuité de la fonction au point (x_0, y_0).

---

remarqua que cette condition n'était pas suffisante [*Ueber trigonometrische Reihen* (*J. de Crelle*, t. 71, p. 361)].

Exemple : La fonction égale à o à l'origine et à $\frac{2xy}{x^2+y^2}$ aux autres points du plan est, à l'origine, continue séparément par rapport à x et par rapport à y, puisqu'elle s'annule sur chacun des axes. Elle est discontinue quand on marche dans une direction autre que celle des axes; par exemple, sur la bissectrice $x=y$, la fonction saute brusquement de la valeur o à la valeur 1.

En partant de cet exemple, M. Baire donne le moyen de former une fonction continue par rapport à chaque variable, sans qu'il existe aucune aire où elle soit toujours continue par rapport à leur ensemble (*Thèse*, p. 16 et 88; 1899).

Remplaçons dans la fonction précédente y par y^2. La fonction obtenue $\frac{2xy^2}{x^2+y^4}$ est continue quand on pose $y = cx$ ou $x = cy$, quelle que soit la valeur finie de c; elle n'est pas continue à l'origine, car si l'on se déplace sur la parabole $y^2 = x$, la fonction passe brusquement de o à 1. Ainsi *une fonction peut être continue suivant toutes les droites passant par un point sans être continue en ce point.* On peut même construire des fonctions discontinues dans n'importe quel domaine, et néanmoins continues sur toute courbe algébrique et même analytique.

De fait, pour qu'une fonction soit continue en un point, il suffit qu'elle converge *uniformément* vers sa valeur en ce point, *sur toutes les droites* qui y aboutissent.

Cf. aussi LEBESGUE, *C. R.*, 1899, 1er semestre, p. 811.

Comme pour les fonctions d'une variable, on en peut déduire les propositions suivantes :

1° *Une fonction continue dans une aire fermée est* LIMITÉE *dans cette aire, et dès lors admet une limite supérieure et une limite inférieure.*

2° *Elle atteint effectivement, au moins en un point de l'aire ou du contour, ses limites supérieure et inférieure, c'est-à-dire elle a un maximum* M *et un minimum* m. $M - m$ *représente l'oscillation de la fonction dans l'aire.*

3° *Elle prend une valeur quelconque, comprise entre* M *et* m, *en une* INFINITÉ DE POINTS *appartenant à l'aire.*

Établissons cette dernière proposition.

Soient A et a les points de l'aire ou du contour, où la fonction atteint ses valeurs maximum et minimum M et m. Si nous les joignons par une ligne arbitraire ne sortant pas de l'aire, nous aurons, le long de cette ligne, une fonction continue d'une variable, qui dès lors prendra au moins une fois toute valeur comprise entre M et m. Comme il y a une infinité de lignes reliant A et a, il y aura une infinité de points où la fonction satisfera aux conditions énoncées ([1]).

22. Une fonction de variable complexe, mise sous la forme

$$f(z) = u + iv,$$

est continue en un point lorsque les fonctions u et v sont continues en ce point.

Cela revient à dire qu'à tout nombre positif donné ε, on peut

---

([1]) Soient une fonction définie sur un ensemble *parfait*, continu ou non; p un point de cet ensemble; $p_1, \ldots, p_n, \ldots$ les points de l'ensemble qui sont intérieurs à une sphère décrite de p et qui ont pour limite p. *L'oscillation de la fonction dans cette sphère* est la différence entre les valeurs maximum et minimum de la fonction à son intérieur. *L'oscillation de la fonction au point* p (le degré de discontinuité, le saut) est la limite de l'oscillation dans la sphère, quand son rayon tend vers zéro.

Ainsi, à tout point de l'ensemble correspond un nombre, nul ou positif, suivant que la fonction est continue ou non en ce point (*voir* p. 37).

faire correspondre un nombre positif δ tel que l'on ait

$$|f(z+\zeta)-f(z)|<\varepsilon \qquad (|\zeta|<\delta),$$

le point $z+\zeta$ devant rester dans le champ où la fonction est définie.

En effet, si ces inégalités sont satisfaites, on en déduit, en posant $\zeta = h + ik$,

$$|u(x+h, y+k) - u(x, y)|^2 + |v(x+h, y+k) - v(x, y)|^2 < \varepsilon^2;$$

par suite, u et v sont continus, puisque le module de chaque différence est inférieur à ε.

Réciproquement, si u et v sont continus, on peut faire en sorte que le module de chacune des différences ci-dessus soit inférieur à $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$; la somme de leurs carrés n'atteindra pas ε^2.

On voit aussi que le module d'une fonction continue est continu.

23. Reprenons la définition de continuité dans un domaine *fermé,* relative, par exemple, aux fonctions de deux variables, et les inégalités qui la caractérisent (p. 37). En chaque point du domaine, on peut faire correspondre, à tout nombre positif donné ε, un nombre δ et même une infinité de nombres δ, tels que les inégalités (1) soient satisfaites.

Est-il possible de satisfaire aux inégalités (1) en tous les points du domaine, *par une même valeur* de δ [1]?

S'il en est ainsi, on dira que la *continuité* de la fonction est *uniforme* dans le domaine.

---

[1] Soit $\Delta(x, y)$ la valeur maximum des quantités δ au point (x, y), ε étant supposé fixé. Ces nombres Δ forment un ensemble d'éléments tous positifs : tout revient à montrer que sa limite inférieure est *positive* (et non pas nulle).

Ici, de fait, ces grandeurs Δ sont fonctions continues de (x, y) : donc elles atteignent effectivement leur limite inférieure (p. 40), qui dès lors est positive. Cette continuité résulte à son tour de ce que la différence des valeurs de Δ en un point (x, y) et en un point M intérieur au cercle de rayon Δ décrit de (x, y) ne dépasse pas en valeur absolue la distance de ces deux points, puisque le cercle décrit de M comme centre, avec un rayon égal à la valeur de Δ relative à M, coupe le premier cercle ou lui est tangent. De là une autre démonstration du théorème.

La notion de continuité uniforme est un cas particulier de celle de convergence uniforme : $f(x, y)$ est uniformément continu, si $f(x+h, y+k)$ converge uniformément vers $f(x, y)$ pour $h = k = 0$.

THÉORÈME. — *Une fonction continue dans un domaine fermé est* UNIFORMÉMENT CONTINUE *dans ce domaine* [1].

Il faut prouver qu'au nombre ε correspond un nombre positif *fixe* δ, tel que la différence des valeurs de la fonction en deux points (x', y'), (x'', y'') soit inférieure à ε, si leur distance n'atteint pas δ.

Pour cela, divisons le domaine en carrés assez petits pour que, dans chacun d'eux, l'oscillation de la fonction n'atteigne pas $\frac{\varepsilon}{2}$; appelons δ le côté de l'un de ces carrés.

Ou bien les deux points (x', y'), (x'', y'') appartiennent au même carré, et alors on a

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| < \frac{\varepsilon}{2},$$

ou bien ils appartiennent à deux carrés ayant au moins un sommet commun (x_i, y_i), ce qui permet d'écrire

$$|f(x', y') - f(x_i, y_i)| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad |f(x'', y'') - f(x_i, y_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et, par suite,

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| < \varepsilon.$$

Remarque. — Il suit de là qu'une fonction de variable complexe, continue *dans un domaine et sur sa frontière,* est uniformément continue.

§ II. — FONCTIONS AYANT UNE DÉRIVÉE DÉTERMINÉE.

24. Soient $u(x, y)$, $v(x, y)$ deux fonctions réelles, continues, admettant des dérivées partielles du premier ordre, elles-mêmes continues dans le champ où on les considère.

---

(1) Le théorème est vrai des fonctions *continues,* définies sur un ensemble *parfait,* continu *ou non.* En effet, supposons qu'il y ait des points de l'ensemble, $p_1, \ldots, p_n, \ldots$ tels que les valeurs des Δ aux points correspondants

$$(\Delta_1 > \Delta_2 > \ldots > \Delta_n > \ldots)$$

aient zéro pour limite. Soit p le point limite des points $p_1, \ldots, p_n, \ldots$. Au point p correspond un nombre positif déterminé Δ; donc dans le voisinage de p, il y a des points p_n pour lesquels Δ_n ne reste pas inférieur à tout nombre donné; l'hypothèse faite était donc absurde.

Voir la thèse de M. Baire, p. 13. — *Cf.* aussi RIQUIER, *A. E. N.*, p. 282; 1890.

La combinaison $w = u(x, y) + iv(x, y)$ est fonction de la variable $z = x + iy$, quelles que soient les fonctions u et v, en ce sens que les valeurs de u et v sont *déterminées*, lorsqu'on se donne un point z, c'est-à-dire x et y.

Mais la généralité même de cette notion lui enlève tout intérêt, car on est ramené à l'étude de deux fonctions de variables réelles, sans que le symbole i joue aucun rôle. Aussi Cauchy l'a-t-il restreinte en imposant à cette combinaison une propriété fondamentale que possédaient de fait les fonctions particulières de variables imaginaires étudiées jusque-là ([1]).

Au sens de Cauchy, une fonction $u + iv$ n'est fonction de z dans un domaine que si en tous les points de ce domaine *elle a une dérivée unique*. Il veut dire par là que la limite du rapport de l'accroissement de la fonction w à l'accroissement de la variable z est la même, quel que soit le chemin suivi pour aller du point $z + \Delta z$ au point z.

On dit qu'une fonction $u + iv$ est *analytique* dans un domaine ([2]) lorsqu'elle est formée au moyen d'éléments u et v

---

([1]) Cauchy, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* (*Œuvres*, 2e série, t. III, p. 213).

La considération des fonctions de variable complexe sous la forme $u + iv$ a été reprise par Riemann : il en fait reposer la théorie sur les équations (H) du n° 25. (*Œuvres*, Dissertation inaugurale, 1851, p. 1.)

([2]) Cauchy appelait *monogènes* les fonctions qui ont une dérivée unique : « Nous appellerons *monogène* une fonction dont la dérivée sera monodrome » (*Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, t. IV, p. 346 : 1847); il appelait *synectiques* celles qui restent finies, continues, monodromes et monogènes dans tout le plan (*cf.* Briot et Bouquet, *Fonctions elliptiques*, 1re édition, p. 11).

En adoptant le terme *fonction analytique*, on a repris une dénomination dont se servait Lagrange pour désigner les fonctions susceptibles d'un développement en séries de puissances, et on l'a étendu aux variables complexes [Lagrange, *Théorie des fonctions analytiques* et *Leçons sur le calcul des fonctions* (*Œuvres*, t. IX et X)].

Pour que la fonction $u + iv$ ait une dérivée unique en un point (x, y) il ne suffit pas que sa dérivée soit la même *sur tous les rayons* aboutissant au point. Ainsi la fonction égale à o pour $x + iy = 0$, et représentée aux autres points par $(x + iy)\dfrac{2xy^2}{x^2 + y^4}$ a à l'origine pour dérivée o sur toute droite passant par l'origine; néanmoins elle n'est pas monogène.

Ici, comme au n° 21, on peut démontrer qu'une fonction est monogène si,

déterminés ([1]) et continus ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre, et *qu'elle a une dérivée déterminée,* ces conditions étant satisfaites *en général* dans le domaine, c'est-à-dire sauf peut-être en des points dont la suppression laisse continu le domaine dans lequel la fonction jouit de ces propriétés.

25. Théorème. — *Pour que la combinaison* $w = u + iv$, *formée à l'aide de fonctions en général déterminées et continues, ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre, soit analytique dans un domaine, il faut et il suffit qu'en tout point de ce domaine* (sauf aux points d'exception) *ces fonctions satisfassent aux équations aux dérivées partielles*

$$\text{(H)} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

En effet, donnons à z l'accroissement Δz; w reçoit un accroissement Δw,

$$\Delta w = [u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y)] + i[v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y)],$$

ou bien, en appliquant le théorème des fonctions composées,

$$\Delta w = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon\right)\Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon'\right)\Delta y + i\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \eta\right)\Delta x + \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \eta'\right)\Delta y\right],$$

car les dérivées sont des fonctions continues ($\varepsilon, \varepsilon', \eta, \eta'$ sont des fonctions de x, y, Δx, Δy dont les modules tendent vers zéro avec Δz).

Divisons les deux membres par $\Delta x + i\,\Delta y$, et faisons tendre

---

$f'(z)$ désignant la valeur de la dérivée par un chemin particulier

$$\frac{f(z + re^{i\theta}) - f(z)}{re^{i\theta}} - f'(z)$$

tend *uniformément* vers o avec r, quelle que soit la direction θ par laquelle la variable se rapproche du point z. *Cf.* Stolz, *Grundzüge, etc.*, p. 80.

([1]) La fonction reste analytique si en chaque point elle a plusieurs déterminations, et même une infinité, pourvu qu'elles ne forment pas une infinité continue (n° 77), et que, d'une détermination initiale choisie, on puisse déduire, le long de toute courbe continue, un ensemble de valeurs satisfaisant aux conditions énoncées de continuité et de monogénéité (*voir* le paragraphe suivant et le Chapitre V).

vers zéro Δx et Δy, de manière que leur quotient ait une limite finie déterminée (que nous représenterons par m) ou devienne infini. Géométriquement, c'est dire que le point $z + \Delta z$ décrit une courbe qui a une tangente déterminée.

On voit que $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ a une limite; elle a pour valeur

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x} + m\frac{\partial u}{\partial y} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + m\frac{\partial v}{\partial y}\right)}{1 + im}.$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que cette dérivée (fraction rationnelle en m) ne change pas avec le paramètre m sont

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right).$$

Cette égalité équivaut aux deux formules (H) (1).

---

(1) *Cf.* RIEMANN, *Œuvres*, p. 5. — D'après la démonstration, il faut et il suffit que la dérivée ait même valeur suivant *deux directions*, pour qu'elle soit la même dans toutes les directions (*voir* p. 47, note 2).

Sans faire d'hypothèses *a priori* sur la *continuité des dérivées* des fonctions u et v, on peut chercher les conditions pour que la combinaison $u + iv$ ait une dérivée unique.

1° *Conditions nécessaires.* — Laissons y fixe, et donnons à x un accroissement Δx. On a

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i\frac{v(x+\Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x}.$$

Pour que le premier membre ait une limite, il faut que chaque fraction au second membre en ait une, c'est-à-dire *que u et v aient des dérivées par rapport à x*. Alors dans ce déplacement parallèle à l'axe des x, la dérivée de w sera $\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$.

En cherchant la dérivée de la fonction dans un déplacement parallèle à l'axe des y, on voit de même que *u et v doivent avoir des dérivées par rapport à y*. En égalant les deux valeurs trouvées pour la dérivée de w, on obtient comme troisième condition nécessaire les *relations* (H).

Mais nous n'avons pas exprimé toutes les conditions nécessaires. Il faut que par un chemin *quelconque* les dérivées soient les mêmes.

Si nous appelons $w'(z)$ la valeur que nous venons de trouver pour la dérivée de w, on devra pouvoir faire correspondre à tout nombre positif donné ε un nombre positif δ, tel que l'on ait

$$\left|\frac{\Delta w}{\Delta z} - w'(z)\right| < \varepsilon \qquad (|\Delta z| < \delta).$$

Dès lors, on aura $\Delta w = \Delta z[w'(z) + \eta]$, η étant une fonction de Δz qui

26. *Corollaires :*

I. Supposons que les fonctions u et v aient des dérivées partielles *du second ordre,* et des dérivées continues. On verra du reste (nos **171** et **76**) que l'existence et la continuité des dérivées *du premier ordre* entraînent l'existence et la continuité des dérivées *de tout ordre.*

On peut alors dériver partiellement les relations (H) et de la combinaison des équations obtenues déduire

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$$

Ainsi les fonctions u et v sont des intégrales de l'équation de Laplace.

---

tendra vers zéro avec Δz. En séparant les parties réelles et les parties imaginaires, et en s'aidant des conditions nécessaires déjà trouvées, c'est-à-dire des relations (H), on en déduit que Δu et Δv doivent pouvoir s'écrire

$$(\mathrm{G})\qquad \begin{cases} \Delta u = \Delta x\dfrac{\partial u}{\partial x}+\Delta y\dfrac{\partial u}{\partial y}+\varepsilon_1\,\Delta x-\varepsilon_2\,\Delta y,\\[2mm] \Delta v = \Delta x\dfrac{\partial v}{\partial x}+\Delta y\dfrac{\partial v}{\partial y}+\varepsilon_1\,\Delta x-\varepsilon_2\,\Delta y; \end{cases}$$

ε_1, ε_2 tendant vers zéro quand Δx et Δy tendent indépendamment l'un de l'autre vers zéro.

En résumé, pour que la combinaison $u+iv$ ait une dérivée unique au point z, il faut que dans le voisinage de ce point on puisse satisfaire aux relations (H) et (G).

2° *Conditions suffisantes.* — Ces conditions sont aussi suffisantes. En effet, supposons-les remplies. Si nous posons $\Delta x=\rho\cos\alpha$, $\Delta y=\rho\sin\alpha$, on pourra écrire, à cause des équations (G),

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha+i\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial v}{\partial y}\sin\alpha\right)}{\cos\alpha+i\sin\alpha}+\varphi(\rho,\alpha),$$

la fonction φ tendant uniformément vers zéro avec ρ quel que soit α.

Le second membre a donc une limite; en vertu des équations (H), le facteur $\cos\alpha+i\sin\alpha$ se trouve aussi au numérateur. La dérivée a donc pour valeur, quel que soit α, l'expression $\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

En particulier, si les dérivées partielles des fonctions u et v satisfont aux relations (H) et sont *continues,* les relations (G) seront vérifiées. Dans ce cas, les relations (H) donnent les conditions nécessaires et suffisantes pour que la combinaison $u+iv$ soit analytique. On voit aussi que la dérivée (elle prend quatre formes différentes) est continue.

Les fonctions F de deux variables continues, ainsi que leurs dérivées des deux premiers ordres, satisfaisant à cette équation, s'appellent *fonctions harmoniques*.

L'équation de Laplace renferme en germe, comme les deux équations simultanées aux dérivées partielles (H), toute la théorie des fonctions d'une variable complexe. On l'écrit sous forme abrégée, en se servant de la notation de Murphy, $\Delta F = 0$.

II. Chaque fonction u et v est harmonique : dès lors aucun des deux éléments d'une fonction analytique ne peut être choisi arbitrairement.

Du reste, à toute fonction harmonique u correspond une fonction v *déterminée à une constante additive près*, telle que la combinaison $u + iv$ soit analytique.

En effet, définissons une fonction v par l'égalité

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy.$$

La règle relative à l'intégration des différentielles totales donne

$$v = \int_{x_0 y_0}^{xy} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right).$$

L'intégrale est prise le long d'un chemin arbitraire joignant les points $(x_0 y_0)$, (x, y); elle est indépendante du chemin, puisque u vérifie l'équation de Laplace (n° 167).

III. Les deux familles de courbes $u(x, y) = \alpha$, $v(x, y) = \beta$ (α et β varient avec les courbes de chaque famille) forment un *réseau orthogonal*, puisque les égalités (H) entraînent la relation

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

IV. Dans la fonction analytique $w = u + iv$ mettons en évidence les variables z et y, ce qui donne

$$w = u(z - iy, y) + iv(z - iy, y).$$

Supposons que la fonction w soit une fraction rationnelle, ou, plus généralement, ait une expression analytique telle que, pour

la dériver, on puisse lui appliquer le théorème des fonctions composées et écrire

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -i\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + i\left(-i\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right).$$

Le second membre est nul en vertu des égalités (H). La lettre y a donc disparu de l'expression de w : en d'autres termes, x et y ne figurent dans w qu'associés par le symbole i.

Remarques :

I. Lorsqu'une fonction $w = f(z)$ est analytique dans un domaine, et qu'une fonction $w_1 = \varphi(w)$ est fonction analytique de w dans le domaine correspondant, w_1 est fonction analytique de z dans le premier domaine.

Car l'existence d'une limite pour $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ et $\frac{\Delta w_1}{\Delta w}$ entraîne l'existence d'une limite pour $\frac{\Delta w_1}{\Delta z}$.

II. Une fonction analytique, $w = u + iv$, a une dérivée analytique (en supposant que u et v aient des dérivées du second ordre, et des dérivées continues).

En effet, la dérivée de w, c'est-à-dire la fonction $\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$ a une dérivée unique, en vertu des identités (H).

27. Au lieu de considérer des fonctions mises sous la forme

$$u(x, y) + i\,v(x, y),$$

on peut reprendre la définition des fonctions analytiques en étudiant *directement* des fonctions d'une variable $x + iy = z$.

Soient

$w = f(z)$ une pareille fonction;
z un point où elle est finie;
$z + \zeta$ un point voisin.

Formons le rapport

$$\frac{f(z+\zeta) - f(z)}{\zeta}.$$

S'il tend vers une limite quand ζ tend vers zéro, et *si cette*

limite est indépendante du chemin suivi par le point $z+\zeta$ pour se rapprocher du point z, cette limite s'appelle la *dérivée* de la fonction, et on la représente par $f'(z)$ ([1]).

28. L'interprétation géométrique des conditions pour qu'une fonction $u+iv$ soit analytique a servi de point de départ à Riemann pour sa théorie des fonctions.

Définir la représentation d'un plan z sur un plan w, c'est se donner deux fonctions $u(x, y)$, $v(x, y)$. La considération d'une fonction analytique mise sous la forme $u+iv$, et par suite de deux fonctions u et v, revient dès lors à l'étude d'une représentation.

Ce qu'il y a de caractéristique, c'est que *les représentations auxquelles conduisent les fonctions analytiques sont conformes;* et réciproquement.

Nous reviendrons (Liv. II, Chap. X) sur cette théorie : bientôt, en étudiant des fonctions simples, on indiquera les représentations auxquelles leurs définitions donnent naissance. Pour l'instant, démontrons cette proposition fondamentale dans la théorie de Riemann :

A toute fonction analytique correspond une représentation conforme directe.

Pour l'établir, on doit prouver que deux courbes arbitraires C et C′ du plan z, passant par un point m, se coupent sous le même angle que leurs courbes images Γ et Γ′, passant par le point μ; de plus, cet angle est encore le même, si l'on tient compte du sens dans lequel il faut tourner pour amener C sur C′ et Γ sur Γ′.

On suppose, au point z, la dérivée *différente de zéro* ([2]).

([1]) Dans tous les cas où l'expression de w en z est telle que l'on en peut déduire, par les règles de la différentiation, une expression de $\frac{dw}{dz}$ en z, la dérivée est évidemment unique.

Nous venons de voir que l'on peut passer de la forme $u+iv$ à la forme $f(z)$: la réciproque est vraie (n° 317), au moins pour les fonctions analytiques.

([2]) Les points où la dérivée cesse d'être finie et différente de zéro sont dits *points irréguliers* de la transformation; en ces points, la représentation peut cesser d'être conforme.

1° On peut donner du théorème une vérification de calcul. Soient

dx, dy, et δx, δy les différentielles dans les déplacements sur C et C′ (*fig.* 3 et 4);

Fig. 3.

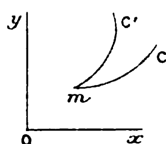
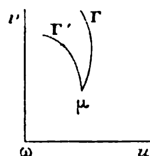


Fig. 4.



α et α' les angles que font avec $\overline{Ox}$ les tangentes à ces courbes (dans les directions qui correspondent aux sens positifs des arcs);

$\alpha' - \alpha$ sera l'angle des tangentes aux courbes C et C′.

Désignons par du, dv, δu, δv, β, β' les éléments correspondants dans les courbes images. On aura

$$\cos(\alpha' - \alpha) = \frac{dx\,\delta x + dy\,\delta y}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)(\delta x^2 + \delta y^2)}},$$

$$\cos(\beta' - \beta) = \frac{du\,\delta u + dv\,\delta v}{\sqrt{(du^2 + dv^2)(\delta u^2 + \delta v^2)}}.$$

A cause des relations (H), on peut écrire

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy,$$

$$dv = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy,$$

et opérer de même pour δu et δv. Après la suppression du facteur différent de zéro

$$\lambda^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

dans l'expression de $\cos(\beta' - \beta)$, on voit que les cosinus des angles $\alpha' - \alpha$ et $\beta' - \beta$ sont les mêmes.

Un calcul simple montre que λ^{-1} représente le rapport de similitude des deux figures dans le voisinage d'un point et du point image.

Il varie d'une manière continue lorsque z décrit une courbe continue.

2° Une démonstration directe [1] met en évidence la raison du théorème, en montrant qu'en chaque point z le *module* de la dérivée représente le rapport de similitude des figures correspondantes (w, z), et que son *argument* donne *en grandeur et sens* l'angle dont doit tourner l'élément d'une courbe z pour devenir parallèle à l'élément correspondant w.

Soient $w = f(z)$ la fonction analytique donnée, $f'(z)$ la valeur de sa dérivée.

Représentons par (z_1, w_1) deux points des courbes C et Γ, voisins des points (z, w).

Des égalités

$$\begin{aligned} f'(z) &= \rho(\cos\omega + i\sin\omega) \qquad (\rho > 0), \\ z_1 - z &= r(\cos\theta + i\sin\theta), \\ w_1 - w &= R(\cos\varphi + i\sin\varphi) \end{aligned}$$

on déduit

$$\lim \frac{R}{r} = \rho, \qquad \lim(\varphi - \theta) = \omega.$$

Lorsque z tend vers zéro, les angles θ et φ ont pour limites les angles α et β que font, avec l'axe des x, les tangentes aux courbes C et Γ.

Donc $\beta - \alpha = \omega$, et par suite la tangente à chaque courbe w s'obtient en faisant tourner d'un angle constant ω la tangente à la courbe z correspondante.

On voit également que, si les axes ont même disposition dans les plans z et w, le sens de rotation est conservé.

---

(1) C'est à peu près la démonstration donnée par Riemann (*Œuvres*, p. 5). — Le lien entre la théorie des variables complexes et la représentation conforme fut découvert par Lagrange et Gauss : *Allgemeine Auflösung der Aufgabe, die Teile einer gegebenen Fläche auf eine andere gegebene Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Teilen ähnlich wird* [GAUSS, 1825 (*Œuvres*, t. IV)].

Remarque. — Faire suivre d'une symétrie par rapport à l'axe des u (*fig.* 5 et 6) une transformation définie par l'égalité

$$u + iv = f(x + iy)$$

Fig. 5.

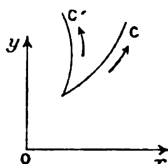
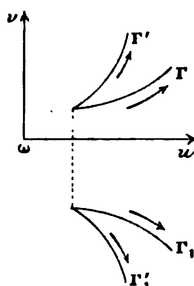


Fig. 6.



revient à la transformation unique

$$u - iv = f(x + iy).$$

Elle est encore conforme, mais conforme inverse, le sens de rotation des angles étant changé.

§ III. — Fonctions analytiques uniformes.

29. Une fonction analytique est *uniforme* dans tout le plan lorsque, en tout point, elle a une valeur unique ([1]). Les fonctions z^m (m étant entier), e^z, $\sin z$, etc., et les fonctions rationnelles de ces fonctions sont uniformes.

Une fonction analytique non uniforme peut avoir un nombre fini de déterminations (par exemple, la fonction algébrique) ou en avoir une infinité (comme le logarithme). En langage géométrique, on dira alors que la fonction a une infinité de branches.

Une fonction peut être uniforme dans un domaine, sans être uniforme dans tout le plan.

Soient un domaine à connexion simple ou multiple, et une fonction w définie par une relation $f(z, w) = 0$, telle que à chaque valeur de z correspondent plusieurs valeurs de w. On conçoit que,

---

([1]) On dit aussi que la fonction est *univoque, monotrope, monodrome, bien déterminée* (*eindeutig*) : à la fonction uniforme on oppose la fonction *multiforme, plurivoque, polytrope, à déterminations multiples*.

sous certaines conditions (nous les préciserons plus tard), une détermination particulière w_1 varie d'une manière continue quand z décrit une courbe continue intérieure à un domaine. La branche w_1 est uniforme dans ce domaine lorsque, à une courbe *fermée* quelconque décrite par le point z et ne sortant pas du domaine, correspond une courbe *fermée* décrite par le point w_1.

Ainsi l'égalité $w^2 = z$ définit deux branches d'une fonction de z ; chacune est uniforme dans tout domaine simplement connexe qui n'a pas l'origine à son intérieur.

La relation $w^2 = z^2 - 1$ définit deux branches, uniformes dans le domaine limité par deux circonférences dont le centre est à l'origine et dont les rayons surpassent l'unité.

30. Une fonction est ***holomorphe*** ou régulière en un point ***intérieur*** à un domaine continu lorsqu'elle est continue, analytique et uniforme en ce point, ainsi que sa dérivée. Un pareil point est dit ***point ordinaire***. Elle est holomorphe dans le domaine, lorsqu'elle est holomorphe en tout point intérieur. Ainsi une fonction mise sous la forme $u + iv$ est holomorphe si les fonctions u et v, ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre sont déterminées et continues, et si ces dérivées satisfont aux relations (H) [1].

Cette définition donnée par Cauchy n'est pas arithmétique, en ce sens qu'elle ne permet pas de calculer effectivement les valeurs de la fonction en chaque point : ce qu'elle indique, ce sont ses propriétés.

Mais un théorème fondamental (n° 177) permet, étant donnée une fonction holomorphe dans un cercle de centre a, de représenter la fonction, à l'intérieur de ce cercle, par une série ordonnée suivant les puissances de $z - a$ [2].

Réciproquement, une pareille série représente une fonction analytique, uniforme et continue, ainsi que sa dérivée.

---

(1) Pour édifier la théorie des fonctions analytiques, lorsque les fonctions à étudier sont mises sous la forme $f(z)$, il suffit même, comme l'a montré M. Goursat, de supposer la continuité de $f(z)$ et l'*existence* de $f'(z)$ (n° 168).

(2) Nous parlons évidemment de séries convergentes, c'est-à-dire telles que les suites formées en additionnant 1, 2, ..., n, ... termes convergent vers une limite (*voir* n° 59).

Dès lors, par *fonction holomorphe dans un domaine* on entend indifféremment (¹) : 1° *une fonction analytique, uniforme et continue, ainsi que sa dérivée première, en tout point intérieur au domaine;* 2° *une fonction développable en série de puissances dans le voisinage de tout point intérieur.*

31. Soit une fonction $f(z)$ holomorphe en un point a, ou pour simplifier à l'origine. On pourra écrire

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots \qquad (|z| < \delta).$$

Lorsque les n premiers coefficients du développement sont nuls, on dit que *l'origine est un zéro d'ordre n*. On a alors

$$f(z) = z^n \varphi(z),$$

$\varphi(z)$ désignant une série entière qui ne s'annule plus à l'origine.

Un zéro d'une fonction est *isolé* lorsque la fonction n'a pas d'autre zéro dans son voisinage (p. 21). Nous verrons que les zéros d'une fonction holomorphe sont des points isolés (n°s 77 et 228).

Lorsqu'une fonction, holomorphe dans un cercle, ne s'annule pas au centre de ce cercle, l'inverse de la fonction est holomorphe dans un cercle concentrique (²).

Weierstrass a appelé *fonctions entières* les fonctions régulières en tout point à distance finie : on les divise en fonctions entières *rationnelles* (ou polynomes) et fonctions entières *transcendantes*.

32. A la fonction *régulière* dans un domaine on oppose celle qui a des singularités : un *point singulier* est un point où la fonction n'est pas régulière.

(¹) On distingue parfois ces définitions en rattachant l'une au nom de Cauchy, l'autre à celui de Weierstrass. Nous démontrerons la plupart des théorèmes en partant de chacune d'elles, et au Livre II nous comparerons les procédés de Cauchy et de Weierstrass.

M. Méray remplace *holomorphe* par *olotrope :* il dit qu'une fonction est olotrope avec un olomètre δ quand le rayon du cercle de convergence est égal à δ.

(²) Ce théorème est évident si l'on adopte pour la fonction holomorphe la définition de Cauchy. Nous le démontrerons (n° 288) en partant de celle de Weierstrass.

Les singularités des fonctions analytiques uniformes sont *polaires* ou *essentielles*.

Un point a est un *pôle* lorsque, dans son voisinage, la fonction peut être mise sous la forme

$$f(z) = \frac{A_1}{z-a} + \ldots + \frac{A_n}{(z-a)^n} + \varphi(z) \qquad (A_n \gtrless 0),$$

$\varphi(z)$ est supposé holomorphe dans le voisinage de a.

La partie du développement qui renferme les puissances négatives de $z-a$ est la *partie principale* ou *caractéristique* relative au pôle a : elle a un nombre *limité* de termes, comme le développement d'une fraction rationnelle ([1]).

([1]) De cette définition résultent les propriétés suivantes (nous les groupons ici, mais nous n'en aurons besoin que plus tard) :

1° *On peut trouver un entier positif n tel que le produit* $(z-a)^n f(z)$ *soit égal à une fonction* $\psi(z)$ *holomorphe dans le voisinage du pôle a.*

La réciproque est vraie. En effet, $\psi(z)$ étant holomorphe dans le voisinage de a, on peut écrire

$$\psi(z) = A_n + A_{n-1}(z-a) + \ldots + A_1(z-a)^{n-1} + \ldots,$$

et dès lors

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{(z-a)^n} = \frac{A_1}{z-a} + \ldots + \frac{A_n}{(z-a)^n} + \varphi(z),$$

$\varphi(z)$ étant holomorphe dans le voisinage de a.

2° *Dans le voisinage d'un pôle, l'inverse de la fonction est une fonction holomorphe.* En effet, de l'égalité

$$(z-a)^n f(z) = \psi(z) \qquad [\psi(a) \gtrless 0]$$

on déduit

$$\frac{1}{f(z)} = (z-a)^n \frac{1}{\psi(z)},$$

la fonction holomorphe $\psi(z)$ n'étant pas nulle en a, son inverse est holomorphe (p. 58).

La réciproque est vraie : une fonction non régulière en un point a, de telle manière que son inverse soit holomorphe, admet le point a pour pôle.

3° *Un pôle est* ISOLÉ ; car, d'après la propriété précédente, les pôles d'une fonction uniforme sont les zéros d'une fonction holomorphe.

4° *Un point* a, *dans le voisinage duquel une fonction a une infinité de zéros ou de pôles, n'est ni un point ordinaire, ni un pôle.* En effet, ce point n'est pas ordinaire, puisque dans son voisinage la fonction a des zéros qui ne sont pas isolés. Ce point n'est pas un pôle, puisqu'il n'est pas isolé. Donc on a affaire par définition à un point singulier essentiel.

L'exposant n indique l'ordre du pôle.

Les fonctions uniformes n'ayant *à distance finie* que des singularités polaires sont appelées *fractionnaires* ou *méromorphes*.

33. Nous verrons (n° 239) que le *point singulier essentiel isolé* [1] est caractérisé par la propriété suivante : dans son voisinage, on peut mettre la fonction sous la forme

$$f(z) = \frac{A_1}{z-a} + \ldots + \frac{A_n}{(z-a)^n} + \ldots + \varphi(z),$$

$\varphi(z)$ est supposé holomorphe dans le voisinage de a.

Dans le cas du pôle, la partie fractionnaire avait un nombre limité de termes; ici, *c'est une série*.

34. *Point à l'infini.* — Le changement de variable $z = \zeta^{-1}$ le ramenant à l'origine, il suffit d'étudier le point zéro de la fonction transformée. Il n'y a rien à changer aux définitions ci-dessus.

1° La fonction $f(z)$ ou $f(\zeta^{-1})$ *est régulière à l'infini* si, dans le voisinage de $\zeta = 0$, on peut écrire

$$f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = a_0 + a_1\zeta + \ldots + a_n\zeta^n + \ldots.$$

Supposons la fonction régulière à l'infini. L'infini est un zéro de la fonction $f(z)$, si la fonction $f(\zeta^{-1})$ s'annule à l'origine, c'est-à-dire si a_0 est nul. L'exposant de la première puissance de ζ dont le coefficient n'est pas nul donne l'*ordrè du zéro*.

2° Si la fonction n'est pas régulière à l'infini, l'infini est un *point singulier*. C'est un point singulier *isolé* si, dans son voisinage, il n'y a pas d'autre point singulier. Cette singularité isolée est *polaire* ou *essentielle*.

---

(1) En parlant de singularité *isolée*, on peut exclure de son voisinage *toutes* les singularités (c'est ce que l'on fait ici), ou seulement les singularités de même type ou de type plus compliqué.

Pour le pôle, il n'y a pas lieu de faire cette distinction, puisqu'il correspond à la singularité la plus simple.

C'est un pôle si, dans le voisinage de $\zeta = 0$, on a

$$f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{A_1}{\zeta} + \ldots + \frac{A_n}{\zeta^n} + a_0 + a_1\zeta + \ldots + a_p\zeta^p + \ldots.$$

Ce pôle est d'*ordre n* ([1]), et la *partie principale* est le polynome

$$A_1 z + \ldots + A_n z^n.$$

C'est un point essentiel, si la partie principale a un nombre illimité de termes.

35. Effectuer une *substitution,* c'est remplacer une ou plusieurs variables par une ou plusieurs fonctions de ces variables. On représente cette opération par les notations

$$(z, \varphi(z)), \quad (x, y, z;\ \varphi(x, y, z), \psi(x, y, z), \chi(x, y, z))$$

ou simplement par

$$(\varphi(z)), \quad (\varphi(x, y, z), \psi(x, y, z), \chi(x, y, z)).$$

Considérons un ensemble de substitutions, en nombre fini ou infini. Le *produit* de deux substitutions données dans un certain ordre est l'opération qui consiste à effectuer la première substitution et, dans le résultat obtenu, à effectuer la seconde (l'ordre dans lequel on exécute ces deux opérations n'est pas indifférent). La définition de *puissance positive* d'une substitution en découle. Les notations

$$(\varphi(z), \psi(z)), \quad (\varphi(\psi(z))), \quad (\varphi^n(z))$$

([1]) On voit ce qu'il faut entendre ici par *zéro d'ordre n*, *pôle d'ordre n* (n est un entier positif fini). On emploie le mot *ordre* dans d'autres acceptions, quand on se sert des locutions : *ordre d'une fonction en un point, ordre total d'une fonction.*

1° *En un point,* l'ordre d'une fonction est zéro, si le point n'est ni une racine, ni un pôle; il est égal à $+n$ ou à $-p$, si le point est racine d'ordre n ou pôle d'ordre p.

2° L'*ordre total d'une fonction* ou simplement l'*ordre* est le nombre total des pôles, comptés avec leur degré de multiplicité, qu'elle admet dans une région. Par exemple, l'ordre d'une fonction algébrique est le nombre total de ses pôles dans tout le plan; l'ordre d'une fonction elliptique est le nombre de ses pôles dans le parallélogramme des périodes.

indiquent, les premières le produit des substitutions $\varphi(z)$, $\psi(z)$, la dernière le produit de n substitutions consistant à remplacer z par $\varphi(z)$ et à répéter cette opération n fois.

On appelle *substitution identique* celle qui n'altère pas la variable.

La substitution *inverse* d'une substitution $(\varphi(z))$ est l'opération qui consiste à remplacer z par une fonction de z' telle que l'on ait $z' = \varphi(z)$. On la représente par $(z, \varphi^{-1}(z))$.

Une substitution suivie de son inverse, c'est-à-dire le produit des substitutions $(z, \varphi(z))$, $(z, \varphi^{-1}(z))$ revient à la substitution identique (z, z).

La substitution inverse ou puissance -1 d'une substitution permet de définir les *puissances négatives* d'une substitution.

Il est souvent commode de représenter par des lettres S, T, U, ... les substitutions d'un ensemble : les symboles ST, STU, S^m, S^{-1}, S^0 (ou 1) désigneront respectivement le produit des substitutions S et T, des substitutions S, T, U, de m substitutions égales à S, la substitution inverse de S, la substitution identique (¹).

Bornons-nous aux ensembles de substitutions dont la définition entraîne celle de l'inverse de toute substitution qui y figure, et qui contiennent l'inverse de toute substitution (et par suite la substitution identique).

Un tel ensemble de substitutions forme un GROUPE, *lorsque le produit de deux substitutions quelconques de l'ensemble appartient à l'ensemble.*

Lorsque, dans un groupe, on peut isoler un nombre fini ou infini de substitutions, telles qu'elles forment un nouveau groupe, ce groupe partiel constitue un *sous-groupe*.

Cette notion de groupe peut être généralisée et appliquée à un ensemble d'opérations ou de transformations : dans les conditions

---

(¹) Les symboles ST, TS n'indiquent pas, avons-nous dit, la même succession d'opérations; aussi l'on n'a pas toujours ST = TS. Au contraire, on peut écrire

$$STU = S(TU).$$

précédentes, elles forment un groupe lorsque la succession, ou produit de deux opérations, est équivalente à une seule opération appartenant à l'ensemble ([1]).

Prenons comme exemple les substitutions linéaires, c'est-à-dire les substitutions $\left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right)$. Le produit de deux quelconques de ces substitutions est une substitution de même type; il en est de même de la substitution inverse de chaque substitution. Nous nous occuperons *seulement* des groupes dont les substitutions dérivent d'un nombre *fini* de substitutions.

En particulier, l'ensemble des substitutions linéaires pour lesquelles a, b, c, d sont *réels* forme un groupe (on suppose toujours, ce qui ne diminue pas la généralité, que le détermi-

---

([1]) Ainsi, en Géométrie plane, l'ensemble des déplacements d'une figure forme un groupe (continu), qui a pour sous-groupes l'ensemble des translations et l'ensemble des rotations autour d'un même point. L'ensemble des homothéties forme un groupe, puisque deux figures homothétiques d'une troisième sont homothétiques entre elles. L'ensemble des inversions ne forme pas de groupe; car le produit de deux inversions n'est pas une inversion.

Ainsi les intégrales d'une équation différentielle linéaire subissent une substitution linéaire quand la variable décrit dans le plan un contour fermé quelconque : l'ensemble des substitutions relatives à tous les contours possibles forme un groupe (discontinu au moins dans une région du plan).

D'une manière générale, soient a, b, c, ... un système d'éléments de nature quelconque : on dit qu'ils forment un *groupe*, quand les conditions suivantes sont réalisées :

1° Le *produit* de deux éléments quelconques a et b du système est un élément c du système;

2° Les éléments ab et ba peuvent être différents; mais les éléments $(ab)c$ et $a(bc)$ doivent être les mêmes;

3° Les égalités $ab = ab'$, $ab = a'b$ doivent entraîner : la première, $b = b'$; la seconde, $a = a'$;

4° *Quand, de trois éléments a, b, c de l'ensemble, deux sont donnés arbitrairement, on doit pouvoir déterminer le troisième de telle sorte que l'on ait $ab = c$.*

On remarquera que, pour les ensembles ayant un nombre *fini* d'éléments, cette quatrième propriété rentre dans les précédentes, et dès lors on peut se dispenser de la vérifier directement.

Cette définition montre que tout groupe renferme la substitution identique (*cf.* WEBER, *Lehrbuch der Algebra*, t. II, p. 3).

nant, $ad - bc$, de chaque substitution est égal à 1) : tout sous-groupe de ce groupe est appelé *groupe fuchsien* (¹).

Parmi les groupes fuchsiens, on distingue le *groupe modulaire :* c'est le groupe formé par toutes les substitutions linéaires, dans lesquelles a, b, c, d sont des *entiers* (de déterminant $+1$). Cet ensemble de substitutions renferme la substitution inverse de chaque substitution et le produit de deux substitutions quelconques, et par suite forme bien un groupe (le déterminant reste égal à 1); il est fuchsien, puisque ses substitutions dérivent d'un nombre fini de substitutions (nº **41**).

Appliquons ces généralités à l'étude des fonctions.

Considérons les fonctions uniformes $f(z)$ qui ne changent pas lorsqu'on effectue sur leur argument z une substitution déterminée $\varphi(z)$ et la substitution inverse de cette substitution. D'après les notations précédentes, on aura

$$f(\varphi(z)) = f(z), \qquad f(\varphi^n(z)) = f(\varphi^{-n}(z)) = f(z).$$

Si $\varphi(z)$ est de la forme $z + a$, la fonction est dite *périodique*.

Si $\varphi(z)$ est de la forme $\frac{az+b}{cz+d}$, la fonction est dite *automorphe* ou à transformation linéaire.

Plus généralement, on appelle *fonctions automorphes* les fonctions uniformes qui restent invariables pour les transformations d'un groupe de substitutions linéaires du type ci-dessus : en particulier, les *fonctions fuchsiennes* sont les fonctions uniformes qui restent invariables pour les transformations d'un groupe fuchsien, et les *fonctions modulaires* celles qui, par les transformations du groupe modulaire, ne prennent qu'un nombre limité de valeurs.

Une *région fondamentale* pour une fonction uniforme est un

(¹) Un groupe est *discontinu* dans une région lorsque, dans le groupe, il n'y a pas de substitution remplaçant un point M de cette région par un point différent de M et dont la distance à M soit inférieure à tout nombre donné.

Un groupe fuchsien est discontinu dans toute région située au-dessus de l'axe réel et n'ayant avec cet axe aucun point commun; il n'est pas discontinu sur cet axe.

domaine dans lequel la fonction prend toutes les valeurs dont elle est susceptible, et prend chaque valeur une seule fois.

En particulier, pour une fonction automorphe, la connaissance d'une région fondamentale permet d'en obtenir une infinité d'autres. Deux régions fondamentales ne peuvent avoir de point commun.

36. *Fonctions holomorphes de plusieurs variables.* — Soit une fonction de p variables complexes $(z_1, \ldots, z_p)$, définie dans un domaine continu multiple, formé par des aires situées dans p plans différents. Elle est holomorphe en un point $(a_1, \ldots, a_p)$ *intérieur* à ce domaine, si elle est holomorphe en ce point respectivement par rapport à chacune des variables, quand les $p-1$ autres variables restent fixes.

On en conclut (p. 57) qu'une fonction holomorphe admet p développements, chacun de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(z_1, \ldots, z_{p-1})_{\substack{z_1 = a_1 \\ \cdots\cdots \\ z_{p-1} = a_{p-1}}} (z_p - a_p)^n \qquad (|z_p - a_p| < \delta),$$

et on lui assignera (nos 139, 182, 297), comme propriété caractéristique, la possibilité d'une représentation par une série multiple

$$\sum A_{\nu_1, \ldots, \nu_p} (z_1 - a_1)^{\nu_1} \ldots (z_p - a_p)^{\nu_p} \qquad (\nu_1, \ldots, \nu_p = 0, 1, 2, \ldots),$$

à l'intérieur de cercles $|z_i - a_i| = \delta_i$, les δ_i étant des nombres positifs fixes, égaux ou non. Ces cercles forment le *voisinage* du point $(a_1, \ldots, a_p)$.

Si l'une des quantités a_r est infinie, on remplace $|z_r - a_r|$ par $\frac{1}{|z_r|}$.

Une fonction est holomorphe dans un domaine, quand elle est holomorphe en tout point intérieur.

LIVRE I.

MÉTHODES GÉNÉRALES DE DÉFINITION ET DE REPRÉSENTATION DES FONCTIONS.

37. Les problèmes que l'on peut se poser *a priori*, comme ceux auxquels conduisent les recherches de Géométrie, d'Astronomie, de Mécanique, de Physique, se traduisent le plus souvent par des équations : elles se présentent sous forme finie ou sous forme différentielle. Comment les résoudre, ou mieux comment étudier les fonctions qu'elles définissent?

Pour les équations algébriques, on essaya d'abord d'obtenir les inconnues en fonction des coefficients, sans recourir aux séries et aux intégrales définies. Quand Abel eut montré qu'au delà du quatrième degré la résolution par radicaux est impossible, les recherches prirent une direction nouvelle. On s'occupa de la réduction des équations à certains types normaux, et de questions relatives aux transformations des irrationnelles et à leur classification [1].

De même, en Analyse, on chercha d'abord à exprimer les solutions des équations différentielles à l'aide de transcendantes connues ou de fonctions définies par des quadratures.

L'*intégration* ainsi entendue n'est possible que dans un nombre très limité de cas. Aussi, dans la théorie moderne des équations différentielles, on se place à un point de vue différent. La question de leur *réduction* joue un grand rôle. « Dans les travaux récents, qui prennent leur point de départ dans la théorie de Galois, un système différentiel est considéré comme définissant des relations entre certaines variables qui jouent toutes le même rôle; le sys-

---

[1] *Cf.* Jordan, *Traité des substitutions*. Préface. — Klein, *Conférences de Chicago* (trad. Laugel, p. 67).

tème est dit *réductible,* si son intégration se ramène à l'intégration successive ou simultanée de systèmes plus simples, combinés d'une manière quelconque [1]. » Dans tous les cas, sans chercher à représenter explicitement l'intégrale de l'équation par une expression analytique unique, on étudie sur l'équation différentielle elle-même les fonctions qu'elle définit. Supposons par exemple démontré que l'intégrale est une fonction analytique au sens de Weierstrass dans un certain domaine : on cherchera à déduire les propriétés de cette fonction des propriétés caractéristiques de l'équation, à voir sur l'équation si cette fonction analytique est uniforme ou multiforme, quelle est la place de ses singularités, quelle est leur nature.

Après l'introduction de transcendantes auxiliaires spéciales (telles que e^z, σz, Γz) pouvant servir d'éléments de réduction, ces problèmes exigent l'étude préliminaire des procédés généraux de représentation des fonctions [les séries, les produits infinis, les intégrales [2]] et la connaissance de certaines catégories de fonctions (par exemple les fonctions analytiques).

Vis-à-vis des transcendantes particulières, plusieurs questions se poseront :

1° Il faudra choisir un point de départ pour leur définition. Si la définition d'une fonction *par une série* a l'avantage d'être très générale, elle met rarement en évidence ses propriétés essentielles, se prête mal à la découverte de propriétés nouvelles, exige souvent un nombre infini d'éléments pour représenter la fonction dans tout son domaine d'existence. D'autre part, l'étude d'une fonction d'après des *propriétés fonctionnelles* est un problème difficile. Aussi, la voie la plus simple est-elle ordinairement celle de l'*équation différentielle* [3].

---

[1] PAINLEVÉ, *Leçons sur les équations différentielles professées à Stockholm,* p. 489.

[2] La théorie des fonctions uniformes a assez progressé pour que l'on puisse considérer comme *intégrée,* au sens moderne du mot, une équation dont l'intégrale est uniforme.

Cf. POINCARÉ, *J. M.,* 1881, p. 375. — PAINLEVÉ, *Leçons, etc.,* p. 1.

[3] Les transcendantes classiques vérifient des équations différentielles simples. Il y a exception pour la fonction $\Gamma(z)$, qui n'est solution d'aucune équation différentielle algébrique, comme l'a montré M. Hölder (*M. A.,* t. XXVIII, p. 1; 1887) et la fonction de Riemann $\zeta(z)$.

2° En introduisant chaque transcendante, on examinera si elle est réductible à des symboles déjà étudiés. Par exemple, l'exponentielle et le logarithme ne peuvent être ramenés aux fonctions algébriques définies par des équations ayant pour coefficients des nombres algébriques.

3° Quand des transcendantes sont réductibles les unes aux autres, il faut faire choix de transcendantes types [1] : ainsi, toutes les fonctions elliptiques peuvent s'exprimer à l'aide d'un certain nombre d'éléments; quels éléments types adopter?

---

[1] *Cf.* Liouville, *J. M.*, 1837, p. 68; 1840, p. 35. — La classification des transcendantes du Calcul intégral, ébauchée par Liouville, n'a pas gardé son importance devant les découvertes modernes de l'Analyse. — *Cf.* Drach, *Essai sur la classification des transcendantes* (*A. E. N.*, 1898, p. 243). — Kœnigsberger, *M. A.*, t. XXVIII, p. 483.

CHAPITRE I.

FONCTIONS ALGÉBRIQUES [1].

§ I. — Fonctions uniformes.

38. Une fonction w de la variable z est *fonction algébrique,* si elle est définie par une relation de la forme $f(z, w) = 0$, où f est un *polynome* entier en z et en w, *irréductible.* Le polynome est irréductible s'il ne peut être remplacé par un produit de facteurs entiers en z et en w.

Les fonctions algébriques les plus simples sont les fonctions *uniformes* qui correspondent aux équations

$$w = \sum a_i z^i, \qquad w = \frac{\sum a_i z^i}{\sum b_k z^k} \qquad \begin{pmatrix} i = 0, 1, \ldots, m \\ k = 0, 1, \ldots, p \end{pmatrix}.$$

Ce sont les *polynomes entiers* et les *fractions rationnelles.*

Pour le polynome, fonction régulière dans tout le plan, le point à l'infini est un pôle; l'ordre de ce pôle est égal au degré du polynome.

La fraction rationnelle cesse d'être régulière dans le voisinage des racines du dénominateur; ces racines sont des pôles. La

---

(1) Dans leur étude, il faut associer les noms de Cauchy, de Puiseux, de Riemann. La voie a été ouverte par Cauchy. Mais c'est le Mémoire de Puiseux (*J. M.*, t. XV, p. 365; 1850) qui, mettant en lumière la nature analytique et les propriétés des fonctions algébriques, en a permis une définition précise et a fait connaître le rôle des points critiques. Riemann (1857), en découvrant les surfaces qui portent son nom, donna une représentation géométrique qui servit de fondement aux découvertes ultérieures.

Dans leurs Ouvrages classiques, Briot et Bouquet se sont arrêtés aux idées de Puiseux; MM. Appell et Goursat ont développé celles de Riemann.

décomposition en éléments simples met en évidence les pôles et les parties principales correspondantes; s'il y a une partie entière, l'infini est un pôle, et cette partie entière (sans la constante) est la partie principale correspondante. La représentation par le quotient de deux polynomes, décomposés eux-mêmes en facteurs, met en évidence les zéros et les infinis.

Le point à l'infini est un zéro (d'ordre $p - m$), un pôle (d'ordre $m - p$), ou un point ordinaire, suivant que l'on a $m < p$, $m > p$, $m = p$. Ainsi, grâce à la considération du point à l'infini, le nombre total des zéros d'une fraction rationnelle est égal à celui des pôles (en tenant compte des degrés de multiplicité). C'est l'*ordre* de la fonction (p. 61).

Examinons, en nous plaçant au point de vue de Riemann, quelques-unes des *représentations* auxquelles ces fonctions donnent naissance.

39. Exemple I. — *Étude des transformations*

$$w = z + a, \qquad w = az, \qquad w = az + b.$$

Supposons les deux plans z et w placés l'un sur l'autre, de façon que les axes de coordonnées coïncident.

La première transformation fait correspondre, à toute figure du plan z, une figure *égale;* elle revient à une *translation*.

La seconde correspond à une *rotation* R autour de l'origine, suivie d'une *homothétie* H par rapport à l'origine; ou, inversement, à l'homothétie H suivie de la rotation R.

On s'en assure en passant aux coordonnées polaires, c'est-à-dire en posant [1]

$$a = \mathrm{A}(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$
$$z = \rho(\cos\omega + i\sin\omega),$$
$$w = \mathrm{A}\rho[\cos(\alpha + \omega) + i\sin(\alpha + \omega)].$$

La troisième peut être remplacée indifféremment par l'un des

---

[1] A une valeur de z correspondent une infinité de valeurs de l'argument ω. On appelle *valeur principale* celle qui satisfait aux inégalités $-\pi < \omega \overline{\leq} \pi$ (Cauchy, *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, t. IV, p. 266; édition de 1847).

systèmes de transformations

(1) $z' = az$, $w = z' + b$,

(2) $z' = z + \frac{b}{a}$, $w = az'$,

(3) $z' = z - c$, $z'' = az'$, $w = z'' + c$ $\left(c = \frac{b}{1-a}\right)$.

Les égalités (1) définissent une homothétie, suivie d'une rotation et d'une translation T.

Les égalités (2) représentent une translation T′, suivie d'une homothétie et d'une rotation. (Dans les deux cas, les translations T et T′ ne sont pas les mêmes; aussi les opérations ne sont pas commutatives.)

Aux égalités (3) correspondent une translation, une homothétie et une rotation, une translation.

Dans les trois systèmes de transformations, les *rotations* sont les mêmes. On retrouve des théorèmes bien connus de Géométrie élémentaire et de Géométrie cinématique.

Réciproquement, toute représentation conservant la similitude peut être obtenue par une transformation du type $w = az + b$.

En effet, une transformation remplaçant une figure (z) par une figure semblable (w), en tenant compte du *sens* de la similitude, est définie quand on a fixé la correspondance de *deux* couples de points (z_1, z_2; w_1, w_2) des deux figures; car alors, à tout point z_3 correspond un point w_3 tel que les triangles $z_1 z_2 z_3$, $w_1 w_2 w_3$ soient semblables et aient même sens de rotation.

Or les relations

$$w_1 = az_1 + b, \qquad w_2 = az_2 + b,$$

qui expriment la correspondance des points (z_1, z_2; w_1, w_2) donnent pour a et b des valeurs déterminées, si les points z_1 et z_2 sont distincts.

Remarque. — Quand on superpose les plans z et w, de manière que les axes de coordonnées coïncident, ce qui revient à transformer le plan z en lui-même, il y a un seul point à distance finie, le point $\frac{b}{1-a}$, qui ne change pas. Il est rejeté à l'infini dans le cas de la translation ($a = 1$).

40. Exemple II. — *Étude de la transformation linéaire la plus générale* (bilinéaire, homographique) ([1])

$$(4) \qquad w = \frac{az+b}{cz+d} \qquad \left(\begin{matrix} a,\ b,\ c,\ d \text{ réels ou imaginaires} \\ ad - bc \gtrless 0 \end{matrix}\right).$$

La correspondance définie par cette relation est biunivoque, au moins quand les variables ont des valeurs finies.

Pour supprimer toute exception, on *convient* de considérer respectivement $w = \infty$ et $z = \infty$ comme des points simples, correspondant aux points $-\frac{d}{c}$ et $\frac{a}{c}$.

L'équation (4) est la relation algébrique la plus générale définissant les transformations biunivoques. Elle dépend seulement des rapports des constantes, et dès lors est déterminée lorsqu'on se donne trois points de l'un des plans et les trois points correspondants de l'autre plan. Quatre points quelconques présentent le même rapport anharmonique que les quatre points transformés.

Si l'on regarde la relation (4) comme définissant la transformation du plan en lui-même, deux points ne changent pas. Ils sont fournis par l'équation

$$cz^2 + (d-a)z - b = 0.$$

On les appelle *points doubles :* M. Klein s'en est servi pour classifier ces substitutions; nous y reviendrons en reparlant des groupes de substitutions linéaires.

Examinons d'abord un *cas particulier,* et montrons que l'égalité $w = \frac{1}{z}$ définit une *inversion* suivie d'une *symétrie.*

Pour cela, superposons les plans z et w, et posons

$$z = \rho(\cos\omega + i\sin\omega), \qquad w = \frac{1}{\rho}(\cos\omega - i\sin\omega).$$

Le changement dans w du signe du coefficient de i correspond

([1]) On appelle souvent *groupe projectif* le groupe formé par l'ensemble des transformations homographiques (4).

Si les grandeurs a, b, c, d, z sont réelles, on a les transformations réelles de ce groupe : les substitutions

$$(x,\ x+a), \quad (x,\ ax), \quad (x,\ ax+b)$$

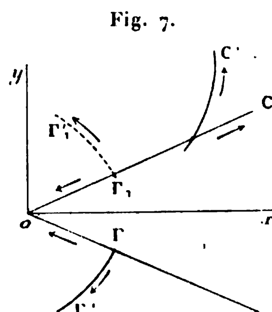
en définissent des sous-groupes.

à une rotation de la figure w autour de l'axe des x, c'est-à-dire à une *symétrie*. Chaque point z et son transformé viennent alors sur un même rayon vecteur, et le produit de leurs modules ou de leurs distances à l'origine est bien égal à l'unité.

On en déduit le *théorème relatif à la conservation des angles dans l'inversion.*

En effet, faisons décrire à z le rayon C et une courbe C′ (*fig.* 7) :

Fig. 7.



w décrira le rayon Γ et une courbe Γ′. Puisque la fonction $\frac{1}{z}$ est analytique, les angles sont conservés (en grandeur et sens). Or une symétrie autour de Ox amène Γ et Γ′ dans des positions Γ_1, Γ'_1 telles que Γ'_1 soit la transformée par rayons vecteurs réciproques de C′. D'après ce que l'on savait des courbes C′ et Γ′, on voit que les tangentes aux courbes C′ et Γ'_1 font avec $\overline{OC}$ des angles supplémentaires (¹).

(¹) Comme cas particulier, citons encore les transformations

$$w = \frac{z}{\alpha - z}.$$

Elles font correspondre d'une manière conforme la portion du plan z située à gauche de la droite $x = \frac{\alpha}{2}\ (\alpha > 0)$ au cercle $|w| = 1$, de telle sorte qu'aux points $z = 0, \frac{\alpha}{2}, \infty$ correspondent les points $w = 0, 1, -1$.

Pour $\alpha = 1$, on a la transformation d'Euler.

Ces transformations servent soit à augmenter la convergence des séries entières, soit dans la théorie du prolongement analytique (n° 241). — *Cf.* BERTRAND, *Calcul différentiel*, p. 253. — TISSERAND, *Mécanique céleste*, t. I, p. 289. — LINDELÖF, *Acta societatis Fennicæ*, t. XXIV, n° 7, p. 6.

Prenons le cas général, et établissons quatre propriétés :

1° *Une transformation bilinéaire équivaut à l'ensemble d'une translation, d'une homothétie, d'une inversion suivie d'une symétrie.*

En effet, mettons l'égalité (4) sous la forme

$$w = k + \frac{1}{c'z' + d'},$$

et posons successivement

$$w' = c'z, \qquad w' + d' = w'', \qquad \frac{1}{w''} = w''', \qquad w''' + k = w.$$

La première transformation est une homothétie; la deuxième et la quatrième sont des translations; la troisième est une inversion suivie d'une symétrie.

2° *Elle transforme les circonférences en circonférences.*

On peut le conclure de ce que les transformations précédentes, sauf, dans un cas particulier, l'inversion, changent les cercles en cercles.

On l'établit directement en écrivant w sous la forme

$$w = \frac{a}{c} \frac{z + \frac{b}{a}}{z + \frac{d}{c}}.$$

Quand w décrit un cercle ayant l'origine pour centre (et un transport des axes ramène tous les cas à celui-là), son module reste constant; par suite z décrit une courbe telle que le rapport des distances d'un de ses points aux deux points fixes $-\frac{b}{a}$, $-\frac{d}{c}$, reste aussi constant : c'est une circonférence.

3° Considérons une transformation d'un groupe fuchsien (a, b, c, d *réels;* $ad - bc = 1$). *Elle transforme le demi-plan au-dessus de l'axe des x dans le demi-plan au-dessus de l'axe des u*; l'axe des x reproduit l'axe des u.

En effet, écrivons

$$w = u + iv = \frac{a(x + iy) + b}{c(x + iy) + d};$$

a, b, c, d étant réels, on en déduit

$$v = \frac{y}{(cx+d)^2 + c^2y^2};$$

par suite y et v sont de même signe et s'annulent en même temps.

On dira en abrégé que ces transformations transforment le *demi-plan nord* z dans le *demi-plan nord* w, ou qu'elles réalisent la représentation conforme de la région nord sur elle-même.

La Géométrie comme le Calcul montrent que de pareilles représentations sont en nombre infini ; par exemple, à trois points arbitraires de l'axe des x on peut faire correspondre trois points arbitraires de l'axe des u (¹).

4° *Toute transformation du groupe modulaire* (a, b, c, d entiers ; $ad - bc = 1$) *résulte de la composition des transformations* $(z \pm 1)$, $\left(-\frac{1}{z}\right)$.

Soit $z = \dfrac{az' + b}{cz' + d}$ la transformation à étudier. On peut supposer $|c| < |a|$; sinon, par la transformation

$$z = -\frac{1}{z_0},$$

(¹) M. Poincaré [*Mémoire sur les groupes fuchsiens* (*A. M.*, t. I, p. 7)] a établi qu'étant données plusieurs figures transformées l'une de l'autre par ces transformations fuchsiennes, les intégrales $\int \frac{ds}{y}$, $\iint \frac{dx\,dy}{y^2}$ étendues à des arcs de courbe ou à des aires ont même valeur pour une figure et ses transformées.

Pour montrer que la première intégrale est un invariant, on écrit

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{(cz+d)^2} = \frac{1}{(cx+d+cyi)^2},$$

$$\frac{|dw|}{|dz|} = \frac{1}{(cx+d)^2 + c^2y^2} = \frac{v}{y}, \qquad \frac{|dw|}{v} = \frac{|dz|}{y};$$

$$\int \frac{|dz|}{y} = \int \frac{|dw|}{v}.$$

Prenons maintenant deux aires correspondantes : elles sont décomposables en triangles semblables de petites dimensions. D'après les calculs précédents, le rapport de similitude étant $\frac{v}{y}$, on a bien aussi

$$\iint \frac{dx\,dy}{y^2} = \iint \frac{du\,dv}{v^2}.$$

z_0 deviendrait une fonction de z' satisfaisant à la condition énoncée, et l'on opérerait sur z_0 au lieu d'opérer sur z.

Il est alors possible de déterminer un *entier* m_1 (le problème a en général deux solutions) tel que l'on ait

$$|m_1 c - a| < |c|;$$

or on a identiquement

$$z = \frac{az' + b}{cz' + d} = m_1 + \frac{(a - m_1 c)z' + (b - m_1 d)}{cz' + d}.$$

La transformation $(z + m_1)$ revient à $|m_1|$ transformations $(z \pm 1)$; aussi il suffit de démontrer le théorème pour la transformation

$$\left(\frac{(a - m_1 c)z + (b - m_1 d)}{cz + d}\right).$$

Effectuons la transformation $\left(-\frac{1}{z}\right)$; dans le résultat posons

$$-c = a_1, \quad -d = b_1, \quad a - m_1 c = c_1, \quad b - m_1 d = d_1.$$

La transformation que l'on est ramené à effectuer s'écrit

$$\left(\frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}\right) \qquad (|c_1| < |a_1|;\ a_1 d_1 - b_1 c_1 = 1).$$

Ainsi, elle est de même type que la transformation initiale, ce qui permet, en reprenant le raisonnement, de former une suite

$$\frac{az + b}{cz + d}, \quad \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}, \quad \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}, \quad \ldots,$$

où les entiers $|c|$, $|c_1|$, ... diminuent toujours. Après un nombre fini d'opérations, on arrivera à un entier nul c_n. Or on a toujours

$$a_n d_n - b_n c_n = 1;$$

les entiers a_n et d_n sont donc égaux à $+1$ ou à -1. La dernière transformation est donc de la forme $(z \pm b_n)$; comme les autres, elle rentre bien dans le type indiqué.

41. Exemple III. — *Étude de la transformation*

$$w = z^m \qquad (m \text{ entier positif}).$$

L'introduction des coordonnées polaires (r, θ; ρ, ω) donne

$$r = \rho^m, \qquad \theta = m\omega.$$

A chaque *arc de cercle* z décrit de l'origine et d'angle au centre $\frac{2\pi}{m}$ correspond une *circonférence* w; quand ρ varie d'une manière continue de o à l'infini, il en est de même de r. Aussi la fonction proposée donne une représentation continue, biunivoque et conforme d'un secteur du plan z, d'angle au centre $\frac{2\pi}{m}$, sur le plan entier w [un seul des rayons extrêmes fait partie de l'aire à représenter (¹)].

La fonction w est *automorphe*, puisqu'elle est uniforme et ne change pas si l'on remplace z par αz, α désignant une racine $m^{\text{ième}}$ de l'unité (autre que 1); α a $m - 1$ valeurs : la fonction demeure inaltérée par $m - 1$ transformations linéaires (²).

Le secteur défini plus haut est une *région fondamentale :* il en est de même de la région comprise entre une courbe ne se coupant pas allant de l'origine à l'infini, et la courbe obtenue en faisant tourner cette courbe, autour de l'origine, d'un angle égal à $\frac{2\pi}{m}$.

Indiquons sur une figure, dans le cas de $m = 2$, comment se fait la correspondance entre les plans z et w.

L'égalité $w = z^2$ donne

$$u = x^2 - y^2, \qquad v = 2xy.$$

(¹) On appelle *groupes cycliques* ceux dont toutes les substitutions s'obtiennent par les puissances d'une seule substitution.

Les substitutions dont il est parlé ici forment un groupe cyclique, puisque toute substitution ($\alpha^\mu z$) peut être obtenue en répétant la substitution (αz), α désignant une racine $m^{\text{ième}}$ primitive de l'unité.

Une substitution S est *cyclique* ou *périodique* (ou encore cyclique d'*ordre fini*), lorsque l'on a $S^n = 1$: le nombre n, choisi le plus petit possible, est l'ordre de la substitution.

Dans l'exemple précédent, les substitutions $\left(-\frac{1}{z}\right)$, $\left(-\frac{1+z}{z}\right)$ étaient cycliques et respectivement du deuxième et du troisième ordre. La substitution $(z+1)$ n'est pas cyclique.

(²) Dans cet exemple et les suivants, la représentation est conforme (p. 53). On le vérifierait directement en calculant le rapport $\frac{d\sigma}{ds}$ des arcs de courbes w et z : ce rapport $m\rho^{m-1}$ ($\rho \gtrless 0$ et ∞) dépend seulement de la *distance* de l'élément ds à l'origine, non de sa *direction*.

Ainsi, à des parallèles aux axes dans le plan w correspondent des hyperboles équilatères dans le plan z ; à chaque carré du plan w correspondent *deux* quadrilatères du plan z, limités par ces arcs d'hyperbole. D'où la correspondance des deux plans, indiquée par la répétition des mêmes traits et des mêmes lettres (*fig.* 8 et 9).

Fig. 8.

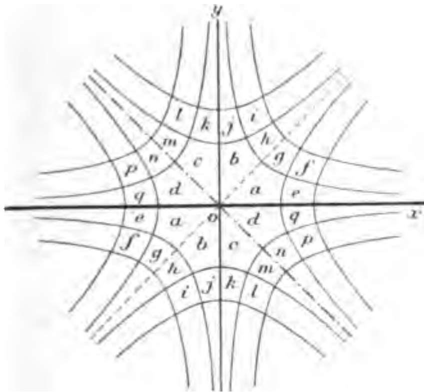
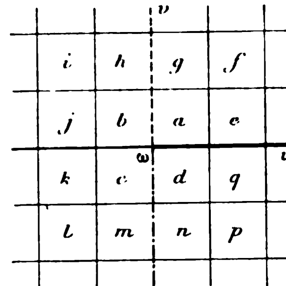


Fig. 9.



Les points $z = 0$, $z = \infty$ sont *irréguliers* (p. 53). De fait, on voit directement qu'à deux courbes du plan z se coupant à l'origine sous un certain angle, correspondent deux courbes dont l'angle est m fois plus grand.

42. Exemple IV. — *Étude de la transformation*

$$(5) \qquad w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{c^2}{z}\right).$$

En posant
$$z = \rho(\cos\omega + i\sin\omega), \qquad w = u + iv,$$
on obtient
$$u = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{c^2}{\rho}\right)\cos\omega, \qquad v = \frac{1}{2}\left(\rho - \frac{c^2}{\rho}\right)\sin\omega.$$

A chaque cercle décrit par z (ρ constant) correspond une ellipse décrite par w ; ces ellipses ont pour foyers les points $\pm c$. A un cercle donné z correspond une seule ellipse w ; à une ellipse w correspondent deux cercles, tels que le produit de leurs rayons soit égal à c^2. Ainsi, par la transformation (5) on représente d'une manière biunivoque, sur le plan w, la partie du plan z située soit

à l'intérieur, soit à l'extérieur du cercle de rayon c (exception faite pour les points de la circonférence de ce cercle).

Au cercle $\rho = c$ du plan z correspond le segment $(-c, +c)$ du plan w. ρ augmentant à partir de c et croissant indéfiniment, l'ellipse w balaie tout le plan. Si ρ décroît de c à o, l'ellipse w, réduite au départ au segment $(-c, +c)$, balaie à nouveau tout le plan, et coïncide successivement avec chacune des ellipses obtenues en faisant croître ρ de c à l'infini.

Divisons le plan z en quadrilatères par des cercles $\rho = \text{const.}$, et des droites $\theta = \text{const.}$ A ces cercles et à ces droites correspondront, dans le plan w, des ellipses et des hyperboles homofocales. D'où, les *fig.* 10 et 11.

Fig. 10.

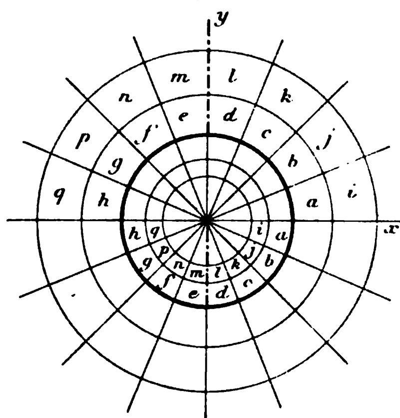
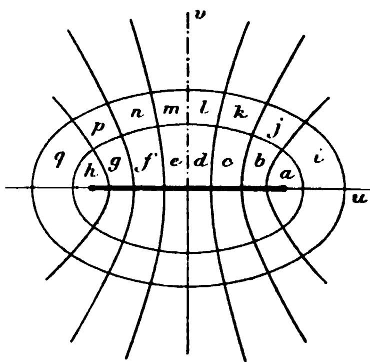


Fig. 11.



La dérivée de la fonction (5) ayant pour expression $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{c^2}{z^2}\right)$, on voit qu'elle cesse d'être finie et différente de zéro aux points $z = 0$, $z = \pm c$. De ces trois points irréguliers, les seuls où la transformation ne soit pas conforme sont les points $\pm c$. Un calcul direct $\left(\text{on posera } w = \frac{1}{w'}\right)$ montre que dans le voisinage du point $z = 0$ les angles sont conservés.

§ II. — Fonctions multiformes. — Cas particuliers.

43. Commençons l'étude des fonctions non uniformes en donnant quelques exemples.

EXEMPLE I. — *Étude de la fonction définie par l'égalité*

$$w^m = z$$

(m est un entier positif; z n'est ni nul, ni infini).

Prenons des coordonnées polaires (r, θ), (ρ, ω). L'égalité

$$r^m(\cos m\theta + i \sin m\theta) = \rho(\cos\omega + i \sin\omega)$$

donne

$$r = \sqrt[m]{\rho}, \qquad \theta = \frac{\omega}{m} + \mu\frac{2\pi}{m} \qquad (\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

La racine $m^{\text{ième}}$ arithmétique de ρ a une valeur déterminée; il suffit de donner à μ m valeurs consécutives. Ainsi à chaque valeur de z correspondent, pour w, m valeurs distinctes. La *valeur principale* sera celle dont l'argument satisfait aux inégalités

$$-\frac{\pi}{m} < \theta \leqq \frac{\pi}{m}.$$

Figurons, sur le plan w, les m points w correspondant à chaque point z : ils sont situés aux sommets d'un polygone régulier ayant l'origine pour centre. A chaque courbe z correspondent m courbes w. Représentons par $w_1, \ldots, w_m$ m déterminations consécutives de w rangées par ordre d'arguments croissants, la première w_1 étant définie par l'égalité

$$w_1 = \rho^{\frac{1}{m}}\left(\cos\frac{\omega}{m} + i \sin\frac{\omega}{m}\right).$$

Lorsque z part d'une valeur $z_0(\rho_0, \omega_0)$ et décrit un contour *fermé n'entourant pas l'origine,* $w_1, \ldots, w_m$ partent de valeurs $w_1^0, \ldots, w_m^0$; puis, comme ρ et ω reprennent leurs valeurs initiales (ρ_0, ω_0), lorsque z a achevé de décrire son contour, chaque racine revient aussi à sa valeur primitive.

Au contraire, lorsque z dans son déplacement *entoure l'origine,* par exemple dans le sens direct, z revient en z_0 avec les valeurs $(\rho_0, \omega_0 + 2\pi)$. Les valeurs initiales et finales de w_1 sont

$$\rho_0^{\frac{1}{m}}\left(\cos\frac{\omega_0}{m} + i \sin\frac{\omega_0}{m}\right), \quad \rho_0^{\frac{1}{m}}\left(\cos\frac{\omega_0 + 2\pi}{m} + i \sin\frac{\omega_0 + 2\pi}{m}\right),$$

w_1^0 s'est transformé en w_2^0. En même temps $w_2^0, w_3^0, \ldots$ ont pris les valeurs $w_3^0, w_4^0, \ldots$. Dès lors, deux, trois, ... p rotations de z

transforment w_1^0 en w_3^0, w_4^0, ..., w_{p+1}^0 : m rotations ramènent la détermination initiale.

Ainsi l'égalité $w^m = z$ peut être considérée comme définissant m fonctions continues et distinctes. Mais il vaut mieux regarder ces valeurs comme les *branches d'une fonction unique :* cette conception est permise, puisqu'en circulant autour de l'origine on passe d'une racine à une autre par variation continue.

Remarques :

I. Quand z décrit un contour fermé quelconque autour de l'origine, les substitutions qui en résultent forment un *groupe,* et même un groupe *cyclique*.

II. Un système de valeurs de z et de w définit un *point analytique;* d'où, pour chaque valeur de z, m points analytiques (z, w_i).

III. Le point autour duquel les racines s'échangent est appelé *point de ramification ou de branchement*. En ce point, la représentation du plan z sur le plan w n'est plus conforme; à deux courbes z se coupant sous un angle ω correspondent deux courbes w faisant un angle $\frac{\omega}{m}$.

44. Exemple II. — *Étude des fonctions*

$$\sqrt{z}, \quad \sqrt{\frac{z-a}{z-b}}, \quad \sqrt{(z-a)(z-b)}.$$

Nous venons d'étudier la première, et de montrer que tout nombre, s'il n'est ni nul ni infini, a deux racines carrées. Les autres irrationnelles s'y ramènent, par l'un des changements de variable univoques

$$\frac{z-a}{z-b} = z', \qquad z - a = \frac{1}{z'}.$$

Remarque. — La première de ces transformations ramène encore l'une à l'autre les fonctions

$$\sqrt[n]{z}, \quad \sqrt[n]{\frac{z-a}{z-b}}.$$

Au contraire, l'irrationnelle

$$\sqrt[n]{(z-a)(z-b)} \qquad (n > 2)$$

possède, en dehors des points critiques a et b, un troisième point de branchement à l'infini.

45. Exemple III. — *Étude de la fonction w définie par l'égalité*

$$w^2 = (z-a)(z-b)\ldots(z-l).$$

1° A chaque valeur de z correspondent deux valeurs de w distinctes (en supposant que le point z ne vienne en aucun des points $a, b, \ldots, l$) et continues.

2° Autour de chaque point a, les deux valeurs de w s'échangent. En effet, posons

$$z - a = \rho_a(\cos\alpha + i\sin\alpha), \qquad \ldots, \qquad z - l = \rho_l(\cos\lambda + i\sin\lambda).$$

Pour l'une des déterminations w, on a

$$w = (\rho_a \ldots \rho_l)^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\alpha + \ldots + \lambda}{2} + i\sin\frac{\alpha + \ldots + \lambda}{2}\right).$$

Après la rotation autour de a, α a augmenté de 2π; $\beta, \ldots, \lambda$ ont repris leurs valeurs initiales.

3° Plus généralement, z décrivant un contour fermé, les deux déterminations de w s'échangeront ou non, suivant que l'on aura entouré un nombre impair ou pair de racines $a, b, \ldots, l$.

4° Quand z décrit un cercle ayant à son intérieur toutes les racines, ou, ce qui revient au même, un cercle de rayon très grand (ou bien encore entoure le domaine de l'infini), on ramène ou non la détermination initiale, suivant que le nombre m des racines est pair ou impair. Aussi, suivant que m est impair ou pair, le point ∞ est ou n'est pas point de branchement.

Le changement de variable habituel $z = \zeta^{-1}$ conduisait à ce résultat, puisqu'il donne

$$w^2 = \frac{(1-a\zeta)(1-b\zeta)\ldots(1-l\zeta)}{\zeta^m}.$$

Le numérateur ne s'annulant pas avec ζ, chaque détermination de w

reprend ou non sa valeur initiale après une circulation de ζ autour de l'origine, suivant que $\zeta^{\frac{m}{2}}$ n'a pas changé de valeur ou en a changé, c'est-à-dire suivant que m est pair ou impair.

En tenant compte du point ∞, on voit que le nombre des points de branchement de la fonction w est le même, qu'il y ait au second membre $2p-1$ ou $2p$ facteurs, résultat prévu puisqu'on sait qu'une transformation homographique $(z-a, z^{-1})$ rejette à l'infini une racine a d'un polynome de degré pair, et diminue ainsi son degré d'une unité.

§ III. — La fonction algébrique générale.

46. Soit $f(z, w)=0$ l'équation définissant w comme fonction de z; $f(z, w)$ est un polynome entier en z et en w, de degré m par rapport à w, polynome irréductible. A chaque valeur de z correspondent m valeurs de w distinctes ou égales, finies ou infinies. Occupons-nous d'abord de la *continuité* de ces racines, pour arriver ensuite à la définition de la fonction algébrique.

Lemme. — 1° Lorsqu'un polynome $\varphi(z)$ s'annule à l'origine, à tout nombre positif donné r', on peut faire correspondre un nombre positif r tel que l'on ait $|\varphi(z)|<r'$ lorsque $|z|$ est inférieur à r.

En langage géométrique, on dira que le point $\varphi(z)$ ne sort pas d'un cercle C' ayant l'origine pour centre, quand z reste à l'intérieur d'un cercle concentrique C.

En effet, posons

$$\varphi(z)=a_0 z^n+a_1 z^{n-1}+\ldots+a_{n-1} z.$$

Si l'on désigne par M un nombre supérieur aux modules de tous les coefficients a_i du polynome, à l'inégalité $|z|<r$ correspondra

$$|\varphi(z)|<\mathrm{M}(r^n+r^{n-1}+\ldots+r).$$

On en déduit, en supposant $r<1$,

$$|\varphi(z)|<\mathrm{M}\frac{r}{1-r}.$$

Dès lors, pour avoir $|\varphi(z)|<r'$, il suffit de déterminer r par la

condition

$$\frac{\mathrm{M}r}{1-r} < r', \quad \text{c'est-à-dire} \quad r < \frac{r'}{\mathrm{M}+r'}.$$

2° Quand un polynome $\psi(z)$ ne s'annule pas à l'origine, on peut faire correspondre deux cercles C_1 et C'_1 ayant l'origine pour centre, et des rayons r_1 et r'_1 assez petits pour que, z ne sortant pas du cercle C_1, $\psi(z)$ n'entre pas dans le cercle C'_1.

En effet, dans $\psi(z)$ mettons à part le terme constant et désignons par a son module; pour des valeurs de z assez petites, le module de la somme des autres termes pourra être rendu inférieur à tout nombre donné α, lui-même plus petit que a. Dès lors, on aura bien $|\psi(z)| > a - \alpha$, ce qui justifie l'énoncé.

3° Lorsque z se déplace dans le plus petit des cercles C et C_1, $\varphi(z)$ ne sort pas du cercle C′, et $\psi(z)$ n'entre pas dans le cercle C'_1.

47. Théorème I. — *Si pour une valeur finie z_0 l'équation*

$$f(z, w) = 0$$

a toutes ses racines finies et admet la racine simple w_0, on peut tracer deux cercles C et Γ, *de centres z_0 et w_0, de rayons correspondants r et ρ assez petits pour qu'en tout point z intérieur au cercle* C *il y ait une racine w, et une seule, intérieure au cercle* Γ (¹).

Ramenons à l'origine les points z_0 et w_0, par la substitution $(z, w; z + z_0, w + w_0)$. En ordonnant le polynome f suivant les puissances de w, on aura

$$(1) \quad f(z, w) = \varphi_m(z) w^m + \varphi_{m-1}(z) w^{m-1} + \ldots + \varphi_1(z) w + \varphi_0(z) = 0;$$

$\varphi_0(0)$ est nul, puisque $w = 0$ est racine; $\varphi_1(0)$ et $\varphi_m(0)$ sont différents de zéro, puisque $w = 0$ est racine simple, et qu'à l'origine l'équation n'a pas de racine infinie.

Donnons à z une valeur dont le module ne dépasse pas un

(¹) Dans la suite, lorsque, pour abréger, on ne parlera pas explicitement des cercles C et Γ, c'est à l'énoncé de ce théorème qu'il faudra se reporter pour préciser le sens de ces locutions : *points z voisins d'un point donné, accroissement très petit donné à z.*

nombre r que nous fixerons; soient $w_1, \dots, w_m$ les racines correspondantes.

1° On peut déterminer r de façon que le module de l'une au moins des racines reste inférieur à un nombre positif arbitraire ρ.

En effet, le théorème sur la valeur du produit des racines d'une équation donne

$$w_1 w_2 \dots w_m = (-1)^m \frac{\varphi_0(z)}{\varphi_m(z)}.$$

En vertu du lemme et des hypothèses, on a pu déterminer le rayon r du cercle C de façon que l'on ait à son intérieur

$$|\varphi_0(z)| < \alpha \quad \text{et} \quad |\varphi_m(z)| > \beta,$$

α étant un nombre positif arbitraire et β un nombre positif fixe. Le module du produit des racines n'atteint donc pas $\frac{\alpha}{\beta}$; celui de la plus petite (appelons-la w_1) sera inférieur à $\sqrt[m]{\frac{\alpha}{\beta}}$. Il suffira de déterminer ρ par l'égalité $\rho^m = \frac{\alpha}{\beta}$ pour que w_1 reste à l'intérieur du cercle de rayon ρ.

2° Une seule racine a son module inférieur à ρ.

Débarrassons l'équation (1) de la racine w_1 en divisant son premier membre par $w - w_1$. Elle devient

$$(2)\quad \begin{cases} \varphi_m(z)\, w^{m-1} + [\varphi_m(z)\, w_1 + \varphi_{m-1}(z)]\, w^{m-2} + \dots \\ \qquad + [\varphi_m(z)\, w_1^{m-1} + \dots + \varphi_1(z)] = 0. \end{cases}$$

En désignant par P la dernière parenthèse, on aura cette fois

$$w_2 \dots w_m = (-1)^{m-1} \frac{P}{\varphi_m(z)}.$$

On peut décrire de l'origine un cercle de rayon tel qu'à son intérieur le module du second membre surpasse toujours un nombre fixe.

En effet, $\varphi_1(0)$ n'est pas nul, et par suite, dans un cercle convenable $|\varphi_1(z)|$ dépasse un nombre fixe; de plus, la présence du facteur w_1 permet de rendre le module de la somme des autres termes de P inférieur à tout nombre donné. Donc $|P|$ ne tend pas vers zéro. D'autre part, $|\varphi_m(z)|$ a une limite supérieure finie,

puisque z est fini. Le module de la plus petite racine dépasse donc un nombre fixe.

Remarque. — La substitution (z, z^{-1}) ramènerait à l'origine un point z à l'infini. Aussi il suffit de s'occuper des autres points exclus par l'énoncé du théorème (le point infini peut en faire partie, mais à un autre titre). On les appelle *points singuliers;* ils sont de deux catégories :

1° Les points où l'équation a des racines multiples (finies); en ces points on a

$$f(z, w) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial w} = 0, \qquad \varphi_m(z) \gtrless 0;$$

2° Les points où l'équation a une ou plusieurs racines infinies : en ces points $\varphi_m(z)$ est nul.

48. Théorème II. — *Si l'équation $f(z, w) = 0$ admet, en un point z_0, une racine w_0 d'ordre p, elle a, dans son voisinage, p racines voisines de w_0, et pas davantage* [1].

Lemme. — Le nombre des racines d'un polynome, intérieures à une aire simplement connexe, s'obtient en divisant par 2π la variation subie par l'argument de ce polynome, lorsque la variable décrit une fois dans le sens positif le contour de l'aire.

En effet, le théorème de d'Alembert permet d'écrire tout polynome $F(w)$, de degré m, sous la forme

$$F(w) = A(w - w_1)\ldots(w - w_m).$$

Posons

$$w - w_k = \rho_k(\cos\omega_k + i\sin\omega_k) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

L'argument du produit $F(w)$ est égal à la somme des arguments des facteurs. Or lorsque le point w décrit la frontière de l'aire, l'argument de chaque binome $w - w_k$ augmente de 2π ou reprend sa valeur initiale suivant que le point w_k se trouve ou ne se trouve

[1] Cauchy, *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique* (nouveaux exercices), t. II, p. 109 (édition de 1841). La démonstration classique que nous donnons a l'avantage de pouvoir être appliquée à l'étude des racines des fonctions holomorphes (n° 192).

pas à l'intérieur de l'aire. L'argument du produit augmentera donc d'autant de fois 2π qu'il y a de racines intérieures au contour.

Ce lemme admis, supposons le point (z_0, w_0) ramené à l'origine, et reprenons l'équation

$$f(z, w) = \varphi_0(z) + \varphi_1(z)\,w + \ldots + \varphi_m(z)\,w^m = 0.$$

Nous allons montrer comment déterminer, dans les plans respectifs z et w, deux cercles correspondants C' et Γ, décrits de l'origine avec des rayons r' et ρ tels que, pour tout point z intérieur au cercle C', w ait p valeurs et p seulement dans le cercle Γ.

L'origine est racine d'ordre p : donc $\varphi_0(z), \varphi_1(z), \ldots, \varphi_{p-1}(z)$ s'annulent avec z ; $\varphi_p(z)$ est différent de zéro dans un cercle C de rayon r décrit de l'origine. Écrivons

$$f(z, w) = \varphi_p(z)\,w^p(1 + P + Q),$$

en définissant P et Q par les égalités

$$P = \frac{\varphi_{p+1}}{\varphi_p}\,w + \frac{\varphi_{p+2}}{\varphi_p}\,w^2 + \ldots + \frac{\varphi_m}{\varphi_p}\,w^{m-p},$$

$$Q = \frac{\varphi_0}{\varphi_p}\,\frac{1}{w^p} + \frac{\varphi_1}{\varphi_p}\,\frac{1}{w^{p-1}} + \ldots + \frac{\varphi_{p-1}}{\varphi_p}\,\frac{1}{w}.$$

1° En choisissant assez petit le rayon ρ, on peut rendre le module de P inférieur à un nombre arbitraire, par exemple $\frac{1}{2}$, dans le champ (r, ρ).

En effet, désignons par μ le module minimum du polynome $\varphi_p(z)$, par M le module maximum des polynomes $\varphi_{p+1}(z), \ldots, \varphi_m(z)$ dans le cercle C. On aura dans ce cercle

$$|P| < \frac{M}{\mu}(|w| + \ldots + |w|^{m-p}),$$

et par suite, en supposant $|w| < 1$,

$$|P| < \frac{M}{\mu}\,\frac{|w|}{1 - |w|}.$$

Le module de P n'atteindra pas $\frac{1}{2}$, si l'on assujettit $|w|$ à vérifier l'inégalité

$$|w| < \frac{\mu}{\mu + 2M},$$

c'est-à-dire si le point (z, w) ne sort pas du champ double (r, ρ), ρ représentant un nombre arbitraire inférieur à $\frac{\mu}{\mu + 2M}$.

2° En choisissant assez petit un nombre r' inférieur à r, Q aura aussi son module inférieur à $\frac{1}{2}$, lorsque, z restant à l'intérieur du cercle C', le point w parcourra la *circonférence* du cercle Γ (de rayon ρ).

En effet, appelons M' le maximum des modules des polynomes $\varphi_0(z), \ldots, \varphi_{p-1}(z)$ dans ce cercle C' intérieur à C (dont nous allons fixer le rayon). En tous les points z du cercle C', pour les points w de la circonférence Γ, on a

$$|Q| < \frac{M'}{\mu}\left|\frac{1}{\rho^p} + \ldots + \frac{1}{\rho}\right| \qquad \text{ou} \qquad < \frac{M'}{\mu}\,\frac{1-\rho^p}{\rho^p(1-\rho)};$$

$|Q|$ sera inférieur à $\frac{1}{2}$, si l'on a

$$M' < \frac{\mu}{2}\,\frac{\rho^p(1-\rho)}{1-\rho^p},$$

c'est-à-dire si l'on détermine r' de telle manière que, à l'intérieur de C', M' ne dépasse pas le nombre précédent : cette fixation est possible, car M' est le module maximum de quantités tendant vers zéro et μ n'est pas nul.

Ces préliminaires posés, donnons à z une position fixe dans le cercle C'; faisons décrire à w la circonférence du cercle Γ, et suivons la variation de l'argument de $f(z, w)$.

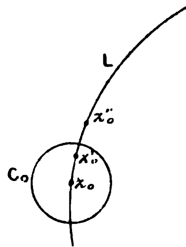
L'argument de w^p augmente de $2p\pi$. Celui de $1 + P + Q$ reprend sa valeur initiale, car, le module de $P + Q$, n'atteignant pas l'unité, le point $1 + P + Q$ reste intérieur au cercle de centre 1 passant par l'origine. Donc l'argument de la fonction f augmente de $2p\pi$.

Par suite, en vertu du lemme, l'équation $f(z, w) = 0$ a p racines et pas davantage à l'intérieur du cercle Γ, pour tout point z à l'intérieur du cercle C'.

49. *Définition de la fonction algébrique.* — Soit toujours l'équation $f(z, w) = 0$.

Prenons un point non singulier z_0, et une ligne L partant de z_0 et ne passant par aucun point singulier. En z_0, w a m valeurs *distinctes :* choisissons l'une d'elles w_1. En tout point z, intérieur à un cercle C_0 décrit de z_0 et en particulier en chaque point de la courbe L intérieur à ce cercle (*fig.* 12), il y a une valeur de w, et

Fig. 12.



une seule, dont le module diffère de $|w_1|$ de moins d'une quantité donnée (p. 85). *Associons cette suite continue de valeurs* à la valeur initiale w_1. En marchant sur la courbe L, par exemple, dans le sens des arcs croissants, nous arrivons ainsi en tout point z'_0 intérieur à C_0 avec une valeur déterminée w'_1. Le système (z'_0, w'_1) pris comme nouveau point de départ nous amènera en z''_0 avec une valeur déterminée w''_1. Et ainsi de suite, le long de la courbe L.

Cette suite déterminée et continue de valeurs w définit une fonction algébrique : elle est uniforme et continue au moins dans la chaîne formée par les cercles C_0, C'_0, ... ayant leurs centres aux divers points de L, et des rayons dont les valeurs dépassent des nombres fixes. Bientôt nous imposerons uniquement à ces cercles de ne pas avoir à leur intérieur de point singulier (¹).

50. *La fonction algébrique ainsi définie est analytique*

(¹) On verra mieux la portée de cette définition lorsque, la théorie des séries entières étant supposée connue, nous pourrons exposer, d'après Weierstrass, la notion de *prolongement analytique* (Chap. V). La racine choisie au départ étant continue, analytique et uniforme dans le cercle C_0, sera développable dans ce cercle en une série de puissances qui fournira l'*élément* initial de la fonction.

dans l'un quelconque de ces cercles. — Nous venons de voir qu'elle est uniforme et continue; montrons qu'elle a une dérivée déterminée et continue.

A un accroissement Δz donné à la variable indépendante correspond, en vertu de la continuité, un accroissement Δw pour la racine w dont nous nous occupons, et l'on a

$$f(z + \Delta z, w + \Delta w) = 0.$$

$f(z, w)$ est aussi nul : dès lors, en désignant par ε et η des fonctions de Δz qui tendent vers zéro, on aura, en vertu de la continuité,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z} + \varepsilon\right)\Delta z + \left(\frac{\partial f}{\partial w} + \eta\right)\Delta w = 0.$$

Dans le domaine où se déplace le point z, il n'y a pas de point singulier; on peut donc diviser par $\frac{\partial f}{\partial w}$, qui n'est pas nul. Divisons ensuite par Δz, et faisons tendre Δz vers zéro. On voit que $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ a une limite, c'est-à-dire que la fonction w a une dérivée. Cette dérivée a pour valeur

$$w'_z = -\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial w}}.$$

Bien que w'_z s'exprime en fonction de w (et de z), et dès lors ait m valeurs en chaque point z, w'_z est déterminé sans ambiguïté, quand on a fait choix de la racine w. Cette dérivée, quotient de fonctions continues ($f'_w \gtrless 0$), est continue.

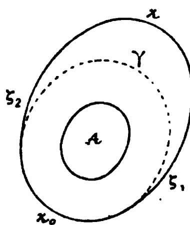
51. *Influence du chemin suivi par la variable z sur la valeur finale de la racine w.* — Partons d'un point ordinaire z_0 avec une racine déterminée w_1 et allons au point ordinaire z par deux chemins différents, ne traversant aucun point singulier. Arrivera-t-on en z chaque fois avec la même valeur de w; ou, ce qui revient au même, un contour fermé ramène-t-il la détermination initiale?

Premier cas : *Dans ce contour, il n'y a pas de point sin-*

gulier. — Alors *tout chemin fermé intérieur à ce contour ramène la détermination initiale.*

En effet, raisonnons par l'absurde. Si un chemin $\zeta_2 z_0 \zeta_1 z \zeta_2$ (appelons-le C) ne ramène (*fig.* 13) pas la détermination initiale,

Fig. 13.



il en sera de même au moins d'un autre contour fermé tel que $\zeta_2 z_0 \zeta_1 \gamma \zeta_2$ ou $\zeta_2 \gamma \zeta_1 z \zeta_2$ (appelons C′ et C″ ces contours); car décrire C, c'est parcourir $\zeta_2 z_0 \zeta_1 \gamma \zeta_2 \gamma \zeta_1 z \zeta_2$, c'est donc décrire les contours C′ et C″.

Soit C′ le contour qui ne ramène pas la valeur initiale; raisonnons sur C′ comme on l'a fait sur C. On arrivera de proche en proche à un contour enveloppant une aire $\mathcal{A}$ assez petite pour qu'elle soit intérieure à l'un des cercles définis au théorème I. Après une circulation de z sur la circonférence de ce cercle, une racine w ne reviendrait pas à sa valeur initiale; il y aurait donc un point singulier intérieur à ce cercle, ce qui est contre l'hypothèse.

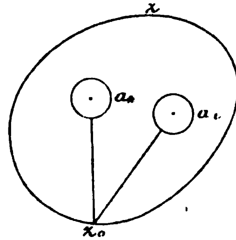
On en conclut que chaque racine w est uniforme, dans toute aire à contour simple n'ayant pas de point singulier à son intérieur.

Deux contours seront dits *équivalents* lorsque, par déformation continue, on pourra les amener à coïncider, sans traverser aucun point singulier.

Second cas : *Il y a des points singuliers à l'intérieur du contour.* — Appelons *lacet* le contour formé par un segment de droite allant d'un point arbitraire z_0 à un point voisin d'un point singulier a, une circonférence entourant a, et le segment initial décrit en sens inverse.

Tout chemin fermé $z_0 z z_0$ est équivalent à un certain nombre de lacets (*fig.* 14). Aussi le problème général dépend de la réso-

Fig. 14.



lution de cette question : quelle modification subit une racine déterminée w, lorsque la variable z décrit un lacet, ou, ce qui revient au même, une circonférence entourant un point singulier?

Traitons-la pour les deux catégories de points singuliers dont nous avons parlé.

Points de la première catégorie. — Supposons qu'au point a l'équation ait p racines égales à b. En un point voisin z_0, elle aura p racines $(w_1, \ldots, w_p)$, et p seulement, voisines de b. Voyons ce que devient l'une d'elles w_1, quand z, partant de z_0, décrit dans le sens direct un cercle autour de a.

La valeur que prend w_1, après une rotation de z, ne peut être que la racine w_1 ou l'une des racines $w_2, \ldots, w_p$ (p. 87). Dans le premier cas, la racine w_1 est uniforme dans le domaine de a : le point a n'est pas singulier pour cette racine. Dans le second, a est point critique pour la racine w_1.

Appelons w_2 la racine ramenée. Qu'arrive-t-il après une seconde circulation de z autour de a? On ne revient pas avec la valeur w_2 (¹); mais on peut ramener soit la valeur initiale w_1 (en ce cas, w_1 et w_2 se permutent dans toute rotation autour de a), soit une nouvelle

(¹) Si cette troisième circulation ramenait w_2, on ramènerait aussi w_2 en repartant avec cette valeur w_2, et en parcourant en sens inverse le cercle que l'on vient de décrire; or par hypothèse, dans ces conditions, on doit retrouver w_1.

On en conclut que l'on retrouvera w_1 (en marchant dans le sens direct), avant de rencontrer toute autre racine w_i déjà obtenue. Par suite, on retrouvera w_1 après p rotations au plus, puisqu'il y a seulement p racines égales à b pour $z = a$.

racine w_3. Si l'on a obtenu w_3, on fera décrire à z un nouveau cercle autour de a; et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on retrouve la valeur initiale w_1. Si l'on retrouve cette valeur après q rotations, on dira que les q racines $w_1, \ldots, w_q$ forment *un système circulaire*.

En résumé, au point a, l'équation a m racines. $m - p$ sont différents de b; si elles sont aussi différentes entre elles, a est pour ces $m - p$ racines un point ordinaire. Quant aux p racines égales à b, divers cas peuvent se présenter :

α. Chaque racine revient à sa valeur initiale, après que z a décrit le lacet a. Le point a est alors un point ordinaire pour ces racines.

β. Par cette rotation de z, les p racines se permutent, w_1, $w_2, \ldots, w_p$ devenant $w_2, w_3, \ldots, w_1$. On dit alors qu'elles forment *un système circulaire*.

γ. Les p racines se répartissent en séries telles que, lorsque z décrit plusieurs fois le lacet a, les racines d'une même série se permutent entre elles, et ne se permutent pas avec les racines d'une autre série. Elles forment alors *plusieurs systèmes circulaires*.

Exprimons ces résultats en prenant le langage de la *théorie des groupes*. A chaque lacet correspond pour chaque racine, ou la substitution identique, ou une substitution faisant partie d'un groupe cyclique. Les substitutions que tous les chemins possibles amènent dérivent d'un nombre fini de substitutions; le produit de deux substitutions quelconques et la substitution inverse de chaque substitution appartiennent à l'ensemble. Aussi *les substitutions relatives aux divers contours fermés que l'on peut tracer dans le plan forment un groupe dit* GROUPE DE MONODROMIE *de l'équation :* il est discontinu.

Les points a autour desquels les racines s'échangent sont dits *points critiques algébriques*, de *ramification*, de *branchement*. Le premier nom rappelle qu'ils sont caractéristiques des fonctions algébriques (n° 52) et les autres la propriété que l'on vient d'établir.

Points de la seconde catégorie. — En un point a, racine de l'équation $\varphi_m(z) = 0$, une ou plusieurs racines w deviennent infinies. Leurs inverses w' tendant vers zéro, la discussion de l'équation transformée $f_1(z, w') = 0$ est ramenée à une étude déjà faite. Par suite :

1° Si pour $z = a$ l'équation $f_1 = 0$ a une seule racine nulle, cette racine w' est holomorphe dans le voisinage de a : son inverse, c'est-à-dire la racine w, admet le point a pour pôle.

2° Si l'équation a plusieurs racines tendant vers zéro, ou bien elles ne se permutent pas entre elles : le point a est encore un pôle pour les racines w; ou bien elles forment un ou plusieurs systèmes circulaires : le point a est un point critique pour les racines qui s'échangent autour de lui.

De là ce théorème important :

Une fonction algébrique n'a que deux types de points singuliers :
1° Des pôles, *c'est-à-dire des points où une ou plusieurs branches de la fonction deviennent infinies, pendant que leurs inverses sont holomorphes dans le voisinage de ces points;*
2° Des points critiques algébriques.

On voit aussi que les points, appelés au début *points singuliers,* peuvent être singuliers pour certaines déterminations sans l'être pour toutes : ils peuvent même être des points ordinaires pour toutes les racines. Quant aux pôles, ils ne jouent aucun rôle particulier dans l'étude des fonctions.

52. Cette proposition vient d'être prouvée par des considérations tout élémentaires. La réciproque repose sur deux lemmes que nous établirons aux nos **181** et **293** (1); on l'énonce ainsi :

Une fonction analytique multiforme ayant partout un

(1) Le premier de ces lemmes est relatif aux développements en série des fonctions; le second apprend qu'une fonction analytique uniforme, n'ayant à distance finie ou infinie que des singularités polaires, est une fraction rationnelle.
Ces lemmes admis, voici comment on démontre le théorème que nous énon-

nombre fini m de déterminations, et n'ayant à distance finie ou infinie d'autres singularités que des pôles ou des points autour desquels les valeurs de la fonction se permutent entre elles, est racine d'une équation algébrique de degré m.

On en conclut ce théorème :

Les m racines d'une équation algébrique sont les branches d'une même fonction, c'est-à-dire qu'il est toujours possible de passer par variation continue d'une racine w_i à une racine w_k, en faisant décrire à z un chemin convenable.

En effet, si tous les chemins possibles permettent uniquement d'échanger entre elles les g racines qui en un point ont les valeurs $w_1, \ldots, w_g$, ces g déterminations sont les racines d'une équation algébrique (car on est exactement dans les conditions d'application du théorème énoncé) et cette équation n'a pas d'autres racines. Elle est donc de degré g, et l'équation algébrique de degré m, qui au point considéré a pour racines $w_1, \ldots, w_g, \ldots, w_m$, n'est pas irréductible.

çons. Soient $w_1, \ldots, w_m$ les valeurs de la fonction en un point z : en vertu de la continuité, le nombre des valeurs de la fonction sera le même en un point voisin non singulier, et de proche en proche dans tout le plan. Essayons de former l'équation qui a pour racines ces m valeurs.

Ses coefficients sont des fonctions symétriques entières des racines. Or de pareilles fonctions ne changent de valeur, ni lorsque z décrit des contours fermés n'entourant aucun point critique (en appelant *points critiques* les points autour desquels les racines w_i se permutent), ni lorsque z décrit des lacets, puisque leur effet est de permuter certaines racines w_i et qu'on a affaire à des fonctions symétriques de ces racines.

Donc ces coefficients sont des *fonctions uniformes* de z.

Ce sont même des *fractions rationnelles*. En effet, pour étudier la nature de ces fonctions uniformes dans les diverses régions du plan, remplaçons-y chaque racine w_i par son développement en série. Si l'on cherche ce qui se passe dans le voisinage d'un point ordinaire z_0, on doit remplacer chaque racine par une série entière en $z - z_0$. Si l'on est dans le voisinage d'un pôle z_0, certains développements auront des termes à exposant négatif en nombre limité. Si l'on est dans le voisinage d'un point critique, il pourra y avoir des puissances fractionnaires de $z - z_0$; mais elles disparaîtront dans la combinaison symétrique représentant le coefficient, puisque c'est une fonction uniforme. Ces conclusions sont vraies, que z_0 soit fini ou infini. Donc, l'expression analytique des coefficients montre que ce sont des fonctions uniformes, n'ayant pour singularité, à distance finie ou infinie, que des pôles, par suite des fractions rationnelles.

53. Terminons par cette question pratique :

Comment reconnaître si un point est EFFECTIVEMENT *point critique pour une racine déterminée w_i, et comment effectuer la séparation en systèmes circulaires?*

Nous reprendrons le problème quand nous parlerons des fonctions définies par une équation dont le premier membre est une fonction holomorphe de w et de z (n° 198), et alors nous ferons usage des développements en série : ici, appuyons-nous sur la continuité, et examinons les cas les plus simples (¹).

Il suffit de s'occuper des points singuliers de la première catégorie, ou des solutions communes aux équations

$$f(z, w) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial w} = 0.$$

PREMIER CAS : *L'autre dérivée partielle n'est pas nulle.* — Prenons le langage géométrique. Les points à étudier sont les points de la courbe analytique $f(z, w) = 0$, où la tangente est parallèle à l'axe des w. Considérons un de ces points, et ramenons-le à l'origine.

1° *L'origine est pour cette courbe un point ordinaire.* — L'équation transformée s'écrit

$$z = a_{02} w^2 + a_{11} z w + a_{20} z^2 + \varphi_3(z, w) + \varphi_4(z, w) + \ldots \qquad (a_{02} \gtrless 0);$$

on a à étudier ses deux racines qui s'annulent avec z, et à voir si de fait elles s'échangent autour de l'origine.

Pour en décider, posons $z = z'^2$, $w = v z'$: l'équation devient, après suppression du facteur z'^2,

$$1 = a_{02} v^2 + a_{11} v z' + a_{20} z'^2 + \ldots.$$

L'origine n'est plus un point singulier pour la fonction algé-

---

(¹) La solution générale a été donnée par Puiseux dans son Mémoire fondamental (*J. M.*, 1850). *Cf.* BRIOT et BOUQUET, *Théorie des fonctions elliptiques*, 2ᵉ édition, p. 42. — PICARD, *Traité d'Analyse*, t. II, p. 350. — APPELL et GOURSAT, *Théorie des fonctions algébriques*, p. 184. — SALMON, *Courbes planes* (Note d'Halphen). — COSSERAT, *Sur l'étude d'une courbe algébrique dans le voisinage d'un de ses points* (*A. T.*, 1890, O.), etc.

brique v racine de cette équation : quand z' est nul, v a deux valeurs finies et *distinctes;* quand z' est très petit, v a deux valeurs voisines de ces valeurs (p. 85) que nous représenterons par

$$\sqrt{\frac{1}{a_{02}}}+\varepsilon_1,\quad -\sqrt{\frac{1}{a_{02}}}+\varepsilon_2 \qquad (\varepsilon_1,\ \varepsilon_2 \text{ s'annulent avec } z').$$

Les deux déterminations de w, dans le voisinage de l'origine, seront donc, $z^{\frac{1}{2}}$ désignant une détermination fixée,

$$w_1=+\sqrt{\frac{1}{a_{02}}}\,z^{\frac{1}{2}}+\varepsilon_1 z^{\frac{1}{2}};\qquad w_2=-\sqrt{\frac{1}{a_{02}}}\,z^{\frac{1}{2}}+\varepsilon_2 z^{\frac{1}{2}}.$$

Quand z entoure l'origine, les deux valeurs de $z^{\frac{1}{2}}$ s'échangent; donc w_1 prend la valeur

$$-\frac{1}{\sqrt{a_{02}}}\,z^{\frac{1}{2}}+\varepsilon'_1 z^{\frac{1}{2}} \qquad (\varepsilon'_1 \text{ s'annule avec } z).$$

C'est l'une des racines w_1 ou w_2 : ce n'est pas la racine w_1, sinon la quantité fixe $2\sqrt{\frac{1}{a_{02}}}$ serait égale à $\varepsilon'_1-\varepsilon_1$, qui tend vers zéro. Donc w_1 et w_2 se sont échangés dans la rotation : le point singulier est un point critique algébrique.

2° *L'axe des w est à l'origine une tangente d'inflexion, et y rencontre la courbe en n points.* — Alors l'équation donnée s'écrira

$$z=a\,w^n+\sum a_{pq}\,z^p\,w^q \qquad \begin{pmatrix} p>1, \text{ si } q=0 \\ q>n, \text{ si } p=0 \end{pmatrix}.$$

En posant $z=z'^n$, $w=vz'$, et en divisant par z'^n, elle devient

$$1-a\,v^n+z'\,\varphi(z',v)=0 \qquad (\varphi \text{ désigne un polynome}).$$

Cette égalité définit v comme fonction algébrique de z'. Pour $z'=0$, *elle a ses racines distinctes :* appelons $v_1, \ldots, v_n$ leurs valeurs principales rangées par ordre d'arguments croissants. Quand z' est très petit, v a n valeurs voisines de $v_1, \ldots, v_n$: représentons-les par $v_1+\varepsilon_1, \ldots, v_n+\varepsilon_n$. Les n valeurs correspondantes de w seront

$$w_1=(v_1+\varepsilon_1)z^{\frac{1}{n}},\qquad \ldots,\qquad w_n=(v_n+\varepsilon_n)z^{\frac{1}{n}},$$

$z^{\frac{1}{n}}$ désignant une détermination particulière ; $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ des nombres tendant vers zéro. Faisons décrire à z une circonférence dans le sens direct autour de l'origine. Les quantités $v_1, \ldots, v_n$ ne changent pas ; $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ prennent des valeurs $\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_n$ qui tendent encore vers zéro ; l'argument de $z^{\frac{1}{n}}$ augmente de $\frac{2\pi}{n}$. Ainsi w_1 devient

$$\left(v_2 + \varepsilon'_1 e^{\frac{2i\pi}{n}}\right) z^{\frac{1}{n}}.$$

Cette racine n'est autre que w_2. En effet, c'est l'une des racines $w_1, \ldots, w_n$: or, ce n'est pas par exemple w_3, sinon on aurait

$$v_3 + \varepsilon_3 = v_2 + \varepsilon'_1 e^{\frac{2i\pi}{n}},$$

égalité absurde, puisque le nombre fixe $v_3 - v_2$ serait égal à une quantité qui tend vers zéro.

Ainsi toute rotation de z remplace chacune des n racines par la suivante : elles forment un système circulaire.

Deuxième cas : *L'origine est un point multiple pour la courbe f.*

1° *Prenons le cas du point double.* — Supposons que les tangentes à la courbe en ce point ne soient pas parallèles aux axes (quel que soit l'ordre de multiplicité du point multiple, il est possible de réaliser cette hypothèse par une rotation des axes). Alors en ce point les fonctions $f(z, w)$, $\frac{\partial f}{\partial z}$, $\frac{\partial f}{\partial w}$ seront nulles ; les fonctions $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial w^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial w} - 4\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\frac{\partial^2 f}{\partial w^2}$ seront différentes de zéro. Par suite l'équation pourra s'écrire

$$(w - \alpha z)(w - \beta z) + \sum a_{pq} w^p z^q \qquad \left(\begin{matrix} p, q \geqq 0 \\ p + q > 2 \end{matrix}\right),$$

ou bien, en remplaçant w par vz et en divisant par z^2,

$$(v - \alpha)(v - \beta) + z\varphi(z, v) = 0 \qquad (\varphi \text{ représente un polynome}).$$

Quand z est nul, cette équation a pour racines α et β ; quand z est très petit, elle a pour racines deux valeurs voisines, que nous

appellerons $\alpha+\varepsilon$, $\beta+\eta$. Les deux valeurs de w que nous étudions seront

$$w_1=(\alpha+\varepsilon)z, \qquad w_2=(\beta+\eta)z.$$

Le raisonnement fait dans les cas précédents montre que, après une rotation de z autour de l'origine, w_1 ne devient pas égal à w_2; donc il reprend la valeur w_1. L'origine est un point ordinaire pour ces racines.

2° *Supposons à l'origine un rebroussement de première espèce.* — Une rotation des axes permettra d'écrire l'équation sous la forme

$$w^2=a_{03}\,w^3+a_{12}\,w^2z+a_{21}\,wz^2+a_{30}z^3+\ldots \qquad (a_{30}\gtrless 0),$$

ou bien, en posant $z=z'^2$, $w=vz'^3$,

$$v^2=a_{30}+z'(a_{21}v+\ldots).$$

Les raisonnements précédents montrent que les deux racines w, nulles à l'origine, s'échangent par la rotation ([1]).

§ IV. — Notions sommaires sur les surfaces de Riemann.

54. Cherchons une représentation géométrique qui aide à rendre intuitives les propriétés des fonctions algébriques que nous venons d'établir.

([1]) Quelles que soient les singularités, la méthode de Puiseux permet de mettre en évidence, par des changements de variable, la répartition des racines en groupes tels que, dans chacun d'eux, w *soit par rapport à z d'un ordre infinitésimal déterminé.* Ainsi, soit l'équation

$$az^7+bz^3w^3+cz^2w^4+dzw^5+ew^9=0.$$

Pour $z=0$, elle a 9 racines nulles; elles se répartissent en trois groupes, comprenant respectivement 3, 2, 4 racines.

Pour le premier, w est d'ordre $\frac{4}{3}$ par rapport à z; aussi l'on pose $z=z'^3$, $w=vz'^4$. On en déduit $a+bv^3+z'\varphi(w,z')=0$. Les trois racines w correspondantes forment un système circulaire.

Pour le second, w est de l'ordre de z; en posant $w=vz$, on voit que chacune des deux racines du groupe forme à elle seule un système circulaire.

Pour le troisième, on pose $z=z'^4$, $w=vz'$; on en déduit que les quatre racines du groupe forment un système circulaire.

Pour cela, au lieu de considérer simultanément les plans z et w, laissons de côté la représentation graphique de la fonction w pour nous occuper de celle de z. Puis *substituons au plan z une surface z telle que la fonction w devienne uniforme sur cette surface.*

Expliquons sur des exemples un premier moyen d'y parvenir.

Exemple I. — Soit l'équation

$$w^2 = z.$$

Prenons deux plans $z(P_1, P_2)$; et dans chacun d'eux traçons une coupure allant de l'origine à l'infini, en suivant une même direction, par exemple celle de l'axe des x (p. 12). On représentera ces coupures par $o_1\infty_1$ et $o_2\infty_2$.

Pour une valeur z_0 de z, w a deux déterminations w_1 et w_2. Associons-les respectivement aux plans P_1 et P_2, et convenons que z pourra dans chaque plan se déplacer arbitrairement, *sans néanmoins jamais franchir* les coupures $o_1\infty_1$ et $o_2\infty_2$.

Grâce aux coupures faites, z ne peut plus décrire de courbe fermée entourant l'origine, et par suite les branches w_1 et w_2 sont devenues uniformes.

La coupure a été obtenue en joignant les deux points de branchement de la fonction, zéro et l'infini.

Une coupure est *artificielle ou essentielle,* suivant que la fonction est continuable ou non au delà de la coupure : ici la coupure est artificielle, car on peut la remplacer par toute autre ligne analogue allant de zéro à l'infini.

Exemple II. — Soit l'équation

$$w^2 = (z-a)(z-b)\ldots(z-l) \qquad (|a| < |b| < \ldots < |l|).$$

1° *Nombre impair de facteurs* $(2p+1)$. — Chaque détermination w_1, w_2 devient uniforme, si l'on considère deux plans z, et si, dans chacun d'eux, on trace des coupures rectilignes allant de a en b, de c en d, ..., de l à l'infini.

2° *Nombre pair de facteurs* $(2p+2)$. — Dans chacun des deux plans, on reliera encore par des coupures les points a et b, c et d, ..., k et l.

Dans le premier cas, le point infini est un point critique; c'est un pôle d'ordre $p+1$ dans le second; dans les deux cas, on a tracé $p+1$ coupures, et on les a obtenues en joignant deux à deux les points critiques.

Il y a d'ailleurs une infinité d'autres manières de tracer ces coupures : on les obtient, par exemple, en joignant à l'infini chacun des points de ramification, par des lignes tracées de telle manière qu'elles ne se coupent pas.

Exemple III. — Pour rendre uniformes les racines de l'équation $w^m = z$, on prendra m plans z, et l'on tracera dans chacun une coupure allant de 0 à l'infini, en suivant par exemple l'axe des x : le point z ne pourra plus entourer l'origine.

55. Les m plans indépendants, auxquels nous avons eu recours pour rendre uniforme chaque racine w, laissent ces racines absolument distinctes, *sans transition possible* de l'une à l'autre. Dès lors, ce procédé masque la propriété fondamentale des fonctions algébriques, d'après laquelle on peut, en faisant décrire à z un chemin convenable, passer d'une détermination à une autre quelconque (p. 96).

La conception de Riemann va mettre cette propriété en pleine lumière : expliquons-la en reprenant les exemples précédents [1].

Exemple I. — Soit l'équation

$$w^2 = z.$$

Dans les plans P_1 et P_2 introduits plus haut, traçons encore, suivant la partie positive de l'axe réel, les coupures rectilignes $0_1\infty_1$, $0_2\infty_2$: chacune a deux bords; nous les appellerons *bords supérieur et inférieur*. Plaçons l'un sur l'autre, sans les faire coïncider, les plans ainsi entaillés, de façon que les bords inférieurs

---

(1) Riemann a indiqué cette méthode dans sa *Théorie des fonctions abéliennes* (*J. de Crelle*, t. 54, 1857; *Œuvres*, trad. Laugel, p. 92).

A dire vrai, le point essentiel de cette méthode est moins dans la simplification apportée, au point de vue de l'intuition des résultats, par cette représentation géométrique, que dans le fait qu'à une surface à feuillets multiples, conçue *a priori*, correspond une classe de courbes algébriques.

des coupures P_1 et P_2 soient soudés respectivement aux bords supérieurs des coupures P_2 et P_1, et ainsi forment des lignes de passage.

Cet ensemble de deux plans distincts, s'entre-croisant comme on vient de le dire, constitue une surface à deux feuillets, dite *surface de Riemann*, attachée à l'équation considérée : le point z pourra s'y déplacer arbitrairement, à la condition de changer de feuillet, comme les soudures l'indiquent, s'il vient à franchir une coupure.

A *une valeur z_0 de z* correspondent ainsi *deux points z_0* de la surface de Riemann, et deux racines w_1, w_2. Associons l'une d'elles w_1 au point z_0 du plan P_1 ; partons de ce point z_0 et déplaçons d'une façon continue le point z sur la surface de Riemann, en lui associant la racine w déduite par continuité de la valeur initiale w_1. On arrive ainsi, en chaque point z d'un feuillet déterminé, avec une valeur de w déterminée et indépendante du chemin suivi : en particulier, à cause de la manière dont les soudures sont faites, on obtient, au point z_0 du feuillet P_2, la racine w_2.

Donc, *sur la surface de Riemann* ainsi définie, *la fonction algébrique est continue, uniforme et analytique.*

Un point analytique étant constitué, avons-nous dit, par un système de valeurs de z et de w, on peut dire qu'à toute valeur de z correspondent deux points analytiques (z, w_1), (z, w_2) et les considérer comme situés sur chaque feuillet de la surface de Riemann.

Exemple II. — Soit l'égalité

$$w^2 = (z-a)(z-b)\ldots(z-l).$$

Superposons les plans P_1 et P_2 de façon que les points $a, b, \ldots, l$ coïncident. Le long des coupures ab, cd, ... établissons des soudures en reliant *en croix* chaque bord d'une ouverture du plan P_1 au bord opposé de l'ouverture du plan P_2 ; partout ailleurs, supposons les feuillets séparés.

Convenons que le point z, toutes les fois qu'il franchira une coupure, changera de feuillet et passera de la partie du feuillet P_1 située d'un côté de la coupure à la partie du feuillet P_2 située de

l'autre côté (la soudure en croix des feuillets indique comment s'effectuent ces passages).

Par ce procédé, on forme une surface de Riemann à deux feuillets, sur laquelle w est fonction continue, uniforme et analytique.

Si l'on a $2p+1$ facteurs (tels que $z-a$), la surface de Riemann a $p+1$ lignes de passage et $2p+1$ points de ramification à distance finie : le point à l'infini est un $(2p+2)^{\text{ième}}$ point de branchement, aussi lorsque z décrit un circuit fermé entourant le domaine de l'infini, le point analytique (z, w) passe d'un feuillet à l'autre.

Si l'on a $2p+2$ facteurs, il y a $p+1$ lignes de passage et $2p+2$ points de branchement à distance finie. Le point ∞ n'est plus point de ramification; il est dans chaque feuillet un pôle d'ordre $p+1$ pour w.

Exemple III. — La surface de Riemann, relative à la fonction définie par l'égalité $w^m = z$, aura m feuillets. Dans chacun d'eux on tracera une coupure allant de l'origine à l'infini, en suivant par exemple l'axe des x.

A une valeur z_0 correspondent m racines $w_1, w_2, \ldots, w_m$: supposons leurs valeurs principales rangées par ordre d'arguments croissants, et associons-les respectivement aux points z_0 situés dans les feuillets numérotés $1, 2, \ldots, m$.

La surface de Riemann s'obtiendra en soudant les bords inférieurs des coupures faites dans les feuillets $1, 2, \ldots, m-1, m$ aux bords supérieurs des coupures faites dans les feuillets $2, 3, \ldots, m, 1$.

56. Ces cas particuliers conduisent à la conception générale de Riemann. Il considère le plan z comme formé de plans superposés, de *feuillets,* dont le nombre est égal au degré par rapport à w de l'équation $f(z, w) = 0$: dans chacun de ces feuillets, il trace des coupures et soude ensemble les bords de celles qui appartiennent à des feuillets différents, comme nous allons l'expliquer.

Soient donc m plans horizontaux. Dans chacun d'eux, marquons tous les points critiques : chaque point a_i est écrit m fois, et ces m points a_i coïncident (ou, si l'on préfère, sont situés sur une même verticale). Traçons dans chaque feuillet une cou-

pure $a_i\infty$, en ayant soin que les coupures relatives à deux points critiques différents ne se croisent pas entre elles. Donnons à z une valeur particulière z_0 telle que les m valeurs correspondantes $w_1, \ldots, w_m$ soient finies et distinctes; et après avoir inscrit dans chaque feuillet le point z_0, associons à chacun de ces points z_0 l'une des valeurs de w. De là m systèmes $(z_0, w_1) \ldots (z_0, w_m)$, ce qui permet de *numéroter* les feuillets : le feuillet h sera celui qui renferme le point (z_0, w_h).

Un déplacement continu de la variable z sur chacun des feuillets, déplacement s'effectuant sans franchir de coupure, l'amènera dans le voisinage d'un point critique a_i avec des valeurs des racines déterminées et distinctes. Ce point a_i peut être, pour l'une d'elles w_h, un point ordinaire ou un point critique. Dans le premier cas, on ne s'occupera plus du feuillet h : la coupure qu'on y a faite servira au besoin à laisser passer d'autres feuillets, qui devraient traverser ce feuillet pour se souder; mais le point z se déplacera dans tout le feuillet h comme si cette coupure n'existait pas. Dans le second cas, w_h fait partie d'un groupe de p racines $(w_\alpha, w_\beta, \ldots, w_\mu)$ se permutant circulairement dans l'ordre des indices : alors on soudera respectivement les bords inférieurs des coupures appartenant aux feuillets $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mu$ aux bords supérieurs des coupures appartenant aux feuillets $\beta, \gamma, \ldots, \mu, \alpha$.

Du voisinage du point a_i, on se rendra successivement, par déplacement continu, dans le voisinage des autres points critiques, pour y refaire la même opération. Les soudures du reste seront les mêmes, que l'on s'astreigne dans ces déplacements à ne pas traverser les lignes de passage $a_i\infty$, ou bien qu'on les franchisse, pourvu qu'alors on poursuive sa route après avoir fait les échanges de feuillets indiqués par les soudures.

L'ensemble des feuillets ainsi découpés et soudés constitue la surface de Riemann. Un point de cette surface est défini par une valeur de z et l'indice du feuillet où ce point est placé. A chaque point z de la surface correspond pour w une valeur bien déterminée : lorsqu'on part de ce point avec cette valeur de w, et que l'on chemine sur la surface, on arrive en tout autre point z, à quelque feuillet qu'il appartienne, et quel que soit le chemin suivi, avec une valeur de w unique; de plus, à un déplacement très petit de z correspond une variation très petite de w (sauf

évidemment dans le voisinage des pôles). Ainsi les fonctions algébriques sont *uniformes et continues* sur la surface de Riemann qui leur correspond ([1]). A chaque valeur de z correspondent m points analytiques $(z, w_1), \ldots, (z, w_m)$ de la surface de Riemann; mais à chaque point de cette surface correspond un seul point analytique et réciproquement.

Comme application, formons la surface de Riemann relative à l'équation

$$4(w^2 - w + 1)^3 = 27\, w^2(1-w)^2 z.$$

Ses points critiques sont o, 1, ∞; traçons dans chaque feuillet les coupures (o, ∞), (1, ∞).

En un point voisin de l'origine, l'équation a six racines, qui deviennent égales trois à trois pour $z = 0$; par la méthode développée plus haut, on voit qu'elles forment deux systèmes circulaires. Désignons par $(w_1 w_2 w_3)$, $(w_4 w_5 w_6)$ celles qui se permutent entre elles (w_1 est une racine choisie arbitrairement, et w_4 est une racine dont nous fixerons plus tard la valeur), et affectons-les respectivement aux feuillets 1, 2, ..., 6. Si l'on suppose que les racines se permutent dans l'ordre des indices, quand on entoure l'origine dans le sens positif, on soudera les bords inférieurs des coupures faites dans les feuillets 1, 2, 3 aux bords supérieurs des coupures faites dans les feuillets 2, 3, 1. Opération analogue avec les feuillets 4, 5, 6.

Autour des points 1 et ∞, les racines s'échangent deux à deux et forment trois systèmes circulaires.

Soient S et T les substitutions relatives respectivement aux lacets entourant les points o et 1; cherchons comment souder les bords des coupures (1, ∞).

Un lacet autour de l'infini revient à deux lacets autour des points o et 1; on peut donc représenter par TS la substitution relative au point infini. Elle permute deux à deux les six racines;

---

(1) Ce n'est là qu'une des manières de tracer les coupures pour former la surface de Riemann : d'après les exemples précédents, on voit qu'il y en a d'autres (*cf.* Appell et Goursat, *Fonctions algébriques*, p. 199).

En regardant chaque point de la surface de Riemann comme appartenant à un seul feuillet, on fait abstraction des lignes doubles : pour ces points il faut indiquer le numéro du feuillet sur lequel on les considère comme situés.

donc $TSTS = 1$. Or on a

$$T^2 = S^3 = 1,$$

donc

$$TST^{-1} = S^2.$$

Il suit de là que la substitution T ne peut échanger entre elles deux racines appartenant aux feuillets 1, 2, 3. Prenons pour feuillet 4 celui dont la racine s'échange avec celle du feuillet 1, et soudons en croix les bords des coupures de ces feuillets.

On en déduit qu'il faudra de même associer les feuillets 2 et 6 et les feuillets 3 et 5. En effet, les soudures étant ainsi faites, les substitutions T, S, T^{-1} échangent par exemple respectivement les feuillets 1 et 4, 4 et 5, 5 et 3, et par suite la substitution TST^{-1} échange les feuillets 1 et 3, comme la substitution S^2 à laquelle elle doit être équivalente.

On en conclut aussi que le groupe de monodromie de l'équation est formé des substitutions

$$1, \quad S, \quad S^2, \quad T, \quad TS, \quad TS^2,$$

car en vertu de l'égalité $TS = S^2T$ tout produit de substitutions S et de substitutions T peut être ramené à la forme

$$T^\alpha S^\beta \qquad (\alpha = 0, 1; \ \beta = 0, 1, 2).$$

57. Une équation algébrique $f(z, w) = 0$, de degré m en w, et de degré p en z, étant donnée, on peut considérer w, et non plus z, comme la variable indépendante. On a ainsi une *seconde* surface de Riemann à p feuillets, dite surface w.

Les deux surfaces z et w, qui correspondent à une même équation algébrique, peuvent être représentées l'une sur l'autre d'une manière univoque et conforme. Montrons sur un exemple comment se réalise cette représentation (1).

Soit la relation

$$w^2 = 1 - z^3.$$

Formons d'abord la *surface* z. Pour chaque valeur de z, w a

(1) *Cf.* BURKHARDT, *Einführung in die Theorie der analytischen Functionen*, p. 183.

deux valeurs, qui se permutent quand z entoure l'un des points 1, α, α^2, ∞ (α désignant l'une des racines cubiques imaginaires de l'unité). La surface z aura deux feuillets : dans chacun d'eux on fera trois coupures, allant des points 1, α, α^2 à l'infini (comme l'indiquent les lignes doubles tracées dans la *fig.* 15), et l'on en soudera les bords, après les avoir croisés, de telle sorte qu'en franchissant chaque coupure le point z change de feuillet.

Formons la *surface* w. Elle a trois feuillets. Les points critiques sont les points 1, -1, ∞ : aussi l'on fera dans chaque feuillet deux coupures suivant l'axe des u, en allant du point 1 à $+\infty$, et du point -1 à $-\infty$. Numérotons les feuillets en convenant que, pour $w = 0$, les points $z = 1$, $z = \alpha$, $z = \alpha^2$ appartiendront respectivement au premier, au deuxième, au troisième feuillet. Alors, le long de la coupure $(1, +\infty)$, on soudera les bords supérieurs des coupures faites dans les feuillets 1, 2, 3, avec les bords inférieurs des coupures faites dans les feuillets 3, 1, 2. Le long de la coupure $(-\infty, -1)$ on soudera les bords supérieurs, dans les feuillets 1, 2, 3, avec les bords inférieurs des feuillets 2, 3, 1.

Comme vérification, on constate que, les soudures étant ainsi faites, si l'on part d'un point du premier feuillet et que l'on entoure une fois le point infini en marchant relativement au point zéro dans le sens des aiguilles d'une montre, on se retrouve sur le second feuillet, comme cela devait être.

Cherchons maintenant quelles sont les régions des deux surfaces z et w qui se correspondent, et d'abord quelles lignes d'une surface correspondent aux coupures de l'autre.

Posons $z = x + iy$, $w = u + iv$; de l'équation proposée l'on déduit

$$u^2 - v^2 = 1 - x^3 + 3xy^2, \qquad 2uv = -3x^2y + y^3.$$

Par suite, aux trois coupures

$$y = 0, \quad y = x\sqrt{3}, \quad y = -x\sqrt{3} \quad (x^2 + y^2 > 1)$$

des deux feuillets z correspondent les droites

$$u = 0$$

des trois feuillets w.

De même, aux deux coupures

$$v = 0, \quad u < -1; \qquad v = 0, \quad u > 1$$

des trois feuillets w correspondent les droites

$$y = 0, \quad x < 0; \qquad y = x\sqrt{3}, \quad x > 0; \qquad y = -x\sqrt{3}, \quad x > 0$$

de chacun des feuillets z.

Étalons séparément les feuillets des surfaces z et w, et indiquons par la répétition du même trait, trait plein ou pointillé, les lignes d'une surface qui correspondent aux coupures de l'autre (les coupures sont figurées par des traits doubles) (*fig.* 15 et 16).

Fig. 15 (*surface z*).

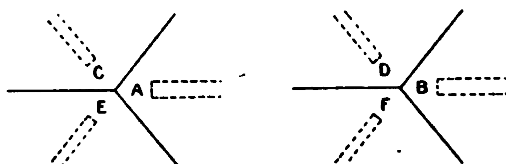
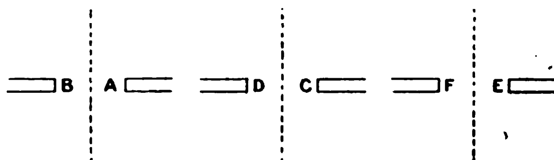


Fig. 16 (*surface w*).



Chaque surface est divisée en six morceaux par les lignes images des coupures de l'autre; la répétition de la même lettre dans les figures indique comment établir la correspondance.

Poursuivons la division; séparons par exemple en quatre parties la région A de la surface w, en traçant une des branches de l'hyperbole $u^2 - v^2 = 1$ et l'axe des u.

Aux portions de courbe

$$u^2 - v^2 = 1, \quad u > 0, \quad v > 0;$$
$$u^2 - v^2 = 1, \quad u > 0, \quad v < 0;$$
$$v = 0, \quad 0 < u < 1,$$

correspondront respectivement sur la surface z les droites

$$x+y\sqrt{3}=0,\quad y<0;\quad x-y\sqrt{3}=0,\quad y>0;\quad y=0,\quad 0<x<1.$$

D'où la correspondance des quatre parties, indiquée encore, dans les *fig.* 17 et 18, par la répétition de la même lettre.

Fig. 17.

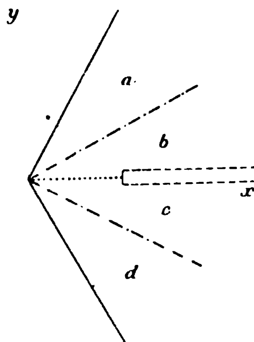
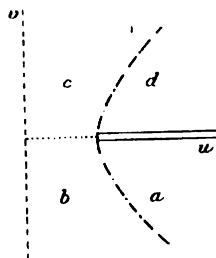


Fig. 18.



On voit la marche à suivre pour subdiviser chaque morceau de l'une des surfaces en portions nouvelles, et trouver dans l'autre surface les régions correspondantes.

Remarque. — Si l'équation $f(z, w)=0$ se réduit à $f(w)=z$, f désignant une fonction rationnelle, la surface w a un seul feuillet : il est alors possible de représenter d'une manière univoque la surface z sur un plan.

Soit $w'=\varphi(z, w)$ une fraction rationnelle en z et en w. Par l'élimination de z entre cette équation et l'équation $f(w)=z$, w' devient fonction rationnelle de w. De là une surface de Riemann w' que l'on peut représenter d'une manière univoque sur le plan w (et par suite aussi sur la surface z) (¹).

(¹) L'importance de cette remarque tient à ce que toute surface z de Riemann, qui peut être représentée d'une manière univoque sur le plan w, est *à connexion simple* : dès lors, avec nos hypothèses, quelle que soit la forme de la fonction φ, les surfaces w' sont aussi à connexion simple.

En effet, tout contour fermé γ ne se coupant pas, tracé dans le plan w, le divise en deux régions telles qu'on ne peut passer de l'une à l'autre sans franchir ce contour. A ce contour γ correspond, sur la surface z, une courbe c la divisant aussi en deux régions, car à toute ligne rencontrant γ correspond une ligne rencontrant c. Dès lors, puisqu'une incision, faite dans le plan w le long de γ, le

58. La conception de Riemann, avons-nous dit, substitue à l'étude d'une fonction w *multiforme sur le plan* z celle de la même fonction rendue *uniforme sur la surface* z.

Soit $w' = \varphi(z, w)$ une fonction rationnelle quelconque de z et de w. A un point de la surface z, correspond une seule valeur de w, et dès lors de w'. Donc cette fonction w' est aussi uniforme sur la surface z. Ainsi cette surface peut servir à représenter et à étudier les points analytiques (z, w') aussi bien que les points analytiques (z, w).

La surface de Riemann, que l'on aurait été conduit à introduire pour l'étude de la fonction w', aurait résulté de l'élimination de w entre les équations

$$f(z, w) = 0, \qquad w' = \varphi(z, w).$$

Soit $f'(z, w') = 0$ la relation obtenue; appelons z' la surface z qu'elle définit. Comparons les surfaces z et z'.

Pour chaque valeur de z, w' a en général le même nombre de valeurs que w (¹), donc les deux surfaces ont le même nombre de feuillets.

Aux points z où plusieurs valeurs de w coïncident, il en est de même des valeurs correspondantes de w' : quand le point analytique (z, w) décrit une courbe fermée, il en est de même du point (z, w'). Donc les surfaces ont les mêmes points critiques, et

---

sépare en deux morceaux distincts, il en sera de même d'une incision faite dans la surface z le long de c.

On démontre que réciproquement toute surface simplement connexe peut être représentée sur un plan.

Ainsi, les surfaces z définies par l'équation

$$w^2 = (z - a_1)\dots(z - a_p),$$

sont à connexion simple seulement pour $p = 1$ et $p = 2$. Pour $p > 2$, on peut les *rendre* simplement connexes par des procédés que l'on trouvera développés ailleurs (PICARD, *Analyse*, t. II, p. 379. — APPELL et GOURSAT, *Fonctions algébriques*, p. 112 et 233).

(¹) Dans des cas particuliers, w' peut avoir moins de valeurs que w. Ainsi, posons

$$w^6 = z, \qquad w' = w^2;$$

w a six valeurs et w' en a trois.

les bords des coupures doivent être soudés dans les mêmes conditions.

De là l'équivalence des surfaces z et z'.

Comme exemple, prenons l'équation $w^2 = \frac{z-a}{z-b}$, qui définit une surface z à deux feuillets, et la fonction

$$w' = w(z-b).$$

On en déduit $w'^2 = (z-a)(z-b)$, qui, à son tour, définit une surface z'. L'étude de la fonction w' peut se faire indifféremment sur l'une des surfaces z ou z', bien que entre z et w', entre z et w, les relations soient différentes. La surface w a un seul feuillet, la surface w' en a deux.

CHAPITRE II.

FONCTIONS DÉFINIES PAR DES SÉRIES [1].

Sous ce titre, on peut se proposer une étude générale des développements convergents, comme aussi de définir des transcendantes analytiques particulières, dont l'introduction permet la résolution de questions nombreuses.

La première Section du Chapitre est consacrée au problème général; dans la seconde viendront quelques séries classiques, spécialement l'exponentielle.

SECTION I.

§ I. — Séries en général.

59. Un ensemble dénombrable d'éléments, réels ou imaginaires, que nous supposerons d'abord constants, *rangés dans un ordre déterminé,* u_0, u_1, ..., u_n, ... est considéré comme donné lorsqu'un terme de rang arbitraire peut être obtenu par des opérations en nombre limité.

[1] L'introduction des séries remonte au XVII[e] siècle : elles furent utilisées d'abord au point de vue presque unique de l'*approximation* des fonctions. Les mathématiciens du XVIII[e] siècle, tout en élargissant leur rôle, ne précisent pas bien la définition et les caractères de convergence. Jacques Bernoulli avait démontré (1689) la divergence de la série harmonique, Euler avait énoncé diverses règles; et néanmoins on lit dans Lagrange : « ... Pour qu'une série puisse être regardée comme représentant réellement la valeur d'une quantité cherchée, il faut qu'elle soit convergente à son extrémité, c'est-à-dire que ses derniers termes soient infiniment petits, de sorte que l'erreur puisse devenir moindre

De cette suite, déduisons les sommes

$$s_1 = u_0, \qquad s_2 = u_0 + u_1, \qquad s_n = u_0 + \ldots + u_{n-1}, \qquad \ldots$$

Elles forment une nouvelle suite (s). Lorsque les termes de cette seconde suite tendent vers une limite s, on dit que *la série* $u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$ *est convergente et a pour somme* s.

Ainsi, dans le cas de la convergence, à tout nombre positif donné ε, on peut faire correspondre un entier fixe N tel que l'on ait

$$|s - s_n| < \varepsilon, \qquad |s_m - s_n| < \varepsilon,$$

m et n étant des nombres arbitraires supérieurs à N. Les *deux* réciproques sont vraies (p. 19).

Par extension de langage, on parle encore de la somme des termes d'une suite (u), lorsque les termes de la suite (s) n'ont pas de limite : la série (u) est alors *divergente*. Parfois, quand les termes sont réels, on réserve ce nom aux séries pour lesquelles s_n croît en valeur absolue au delà de toute limite en gardant à la fin un signe constant : alors les autres séries non convergentes sont dites *oscillantes, indéterminées* ou improprement divergentes.

60. Une série à termes positifs converge, quand les termes de la suite (s) restent tous inférieurs à un nombre fixe.

Une série à termes positifs ou négatifs converge, si la série formée par les valeurs absolues de ses termes est convergente.

Admettons que chaque élément u_p d'une série à termes imaginaires puisse être mis sous la forme $a_p + ib_p$. On aura

$$s_n = (a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1}) + i(b_0 + b_1 + \ldots + b_{n-1})$$

---

qu'aucune quantité donnée.... » (*Œuvres*, t. III, p. 61.) De même, les idées de Lagrange sur la possibilité des développements en série de Taylor, malgré les services qu'elles ont rendus, ne sont pas toutes exactes (*Œuvres*, t. IX).

Le premier, Cauchy [peut-être après Bolzano (1781-1848), mais les écrits de Bolzano ne furent publiés ou connus que plus tard] énonça en toute rigueur les conditions nécessaires et *suffisantes* pour la convergence d'une série, établit d'importants théorèmes sur les séries à termes réels ou imaginaires et montra l'étendue de leur rôle [*Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, 1821 (*Œuvres*, 2ᵉ série, t. III). — *Résumés analytiques de Turin* (*Œuvres*, 2ᵉ série, t. X, p. 127)].

car, n étant fini, on peut traiter s_n comme une somme ordinaire. Dès lors, pour la convergence, il faut et il suffit que les deux séries (a) et (b) soient *séparément* convergentes.

Une série convergente à termes positifs reste convergente lorsqu'on multiplie ses éléments par des facteurs bornés. Dès lors, pour qu'une série à termes imaginaires converge, *il suffit* que la série formée par les modules de ses termes converge.

61. *Une série converge absolument, lorsque la série formée par les modules de ses termes est convergente.* — D'après ce qui précède, une série absolument convergente est convergente. Les séries convergentes qui ne convergent pas absolument sont appelées *semi-convergentes* ([1]).

Les séries absolument convergentes jouissent de deux propriétés essentielles aux sommes composées d'un nombre fini d'éléments : on peut changer l'ordre de leurs termes et remplacer plusieurs termes par leur somme effectuée.

Ce sont les séries commodes en Analyse. D'autre part, pour savoir si une série converge absolument, on doit étudier une série à termes positifs; de là une des raisons de l'importance des séries à termes positifs.

THÉORÈME I. — *Une série absolument convergente reste convergente et conserve la même somme, lorsqu'on modifie arbitrairement l'ordre de ses termes* ([2]).

([1]) Leibniz (lettre à Jean Bernoulli, 1714) a prouvé la convergence des séries du type $\sum(-1)^n a_n$ (on suppose $a_n \geqq a_{n+1} > 0$; $\lim a_n = 0$), et dès lors en particulier de la série harmonique à signes alternés, qui est semi-convergente.

Il ne faut pas confondre ces séries *semi-convergentes* avec les séries *demi-convergentes* de Legendre et les séries *semi-convergentes* de Stieltjes. Les premières (LEGENDRE, *Exercices de calcul intégral*, t. I, p. 267; 1811) sont des suites divergentes telles que le calcul de sommes successives s_n donne, *pourvu que l'on s'arrête aux termes d'un certain rang*, des nombres qui diffèrent peu d'une valeur cherchée; celles de Stieltjes sont les séries *asymptotiques* de M. Poincaré (*voir* n° 86).

L'expression de *conditionnellement convergente*, due à Weierstrass (*Œuvres*, t. I, p. 199), semble plus rationnelle.

([2]) Ce théorème est dû à Riemann (1854). Il a mis en lumière l'identité de ces deux notions : série dont les modules des termes forment une série convergente, série convergente sans conditions relatives à l'ordre des termes (*absoluter, unbe-*

Changer de place les éléments d'une série, c'est les ranger d'après une loi nouvelle qui n'en fasse omettre aucun. Ainsi, deux séries, de terme général u_n et v_p, sont composées des mêmes termes, si à tout entier n on peut faire correspondre un entier p, tel que parmi les p premiers termes de la seconde série se trouvent les n premiers termes de la première, et réciproquement (¹).

Soient

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots, \qquad v_0 + v_1 + \ldots + v_p + \ldots,$$

la série donnée et la série transformée; U la somme de la première, U_n la somme de ses n premiers termes. En choisissant p assez grand, la somme V_p des p premiers termes de la série (v)

---

dingter). Avant lui, Cauchy, en étudiant la série harmonique, avait montré que la convergence de certaines séries de ce type dépend de l'ordre des termes, que certains changements peuvent rendre la série divergente, ou même que, si la convergence de la série subsiste, la somme de la série est altérée [*Résumés analytiques de Turin* (*Œuvres*, 2ᵉ série, t. X, p. 69)].

Lejeune-Dirichlet, en traitant des séries de Fourier (elles représentent le type le plus important de séries semi-convergentes) et des séries de Laplace, avait vu le rôle que jouait, dans la question de l'interversion des termes, la série des modules (*J. de Crelle*, t. 4, p. 157, et t. 19, p. 330. — *Abh. der Berliner Ak.*, 1837), et Ohm (*De nonnullis seriebus infinitis summandis*. Berlin, 1839) avait donné un exemple pour lequel un rangement convenable des termes permet d'obtenir telle valeur que l'on veut (*voir* p. 120, note).

Voici un exemple donné par Dirichlet. Les deux séries

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} \cdots,$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \cdots$$

sont convergentes. En déduisant respectivement de chacune d'elles, par les ***mêmes changements*** dans l'ordre des termes, les séries

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} \cdots,$$

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} \cdots,$$

on a la première fois une série qui diverge, la seconde fois une série qui converge mais n'a pas la même somme que la série dont elle provient.

(¹) Dès lors deux séries ne seraient pas composées des mêmes termes, si de l'une on déduisait l'autre en écrivant d'abord les termes dont l'indice est un nombre premier, puis les termes dont l'indice est pair, etc.

renferme tous les termes de U_n et l'on a

$$V_p = U_n + u_\alpha + u_\beta + \ldots + u_\lambda,$$

les indices $\alpha, \ldots, \lambda$ étant tous supérieurs à $n - 1$. On en conclut :

$$V_p - U = U_n - U + u_\alpha + \ldots + u_\lambda,$$
$$|V_p - U| \overline{\gtrless} |U_n - U| + |u_\alpha + \ldots + u_\lambda|.$$

On a du reste

$$|u_\alpha + \ldots + u_\lambda| \overline{\gtrless} |u_\alpha| + \ldots + |u_\lambda| < |u_n| + |u_{n+1}| + \ldots.$$

A tout nombre positif donné ε, on peut faire correspondre un nombre N assez grand pour que cette dernière expression et en même temps $|U_n - U|$ soient tous deux inférieurs à ε ($n > N$). Donc, quand n, et par suite p, croissent indéfiniment, V_p a une limite et cette limite est U.

62. L'ensemble (u) et les ensembles (v) que l'on vient d'en déduire étaient *semblables* : peut-on aussi remplacer l'ensemble (u) par des ensembles non semblables?

THÉORÈME II. — *Dans une série absolument convergente, on peut d'une infinité de manières répartir les termes en une infinité de groupes, formant chacun une série absolument convergente, et tels que la série formée par les sommes de ces séries converge et ait même valeur que la série donnée* [1].

Représentons toujours par U la somme de la série donnée, et soit

$$V_i = v_{i0} + v_{i1} + \ldots + v_{in} + \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

l'une quelconque des séries partielles formées par des éléments (u). Par exemple, on obtient les diverses séries V_i en prenant les termes (u) dont les indices sont des nombres premiers, sont multiples de 2, sont multiples impairs de 3, etc.

1° *Chaque série* V_i *converge.* — En effet, si U_n désigne la somme des n premiers termes de la série (u), on peut choisir p

---

[1] *Cf.* JORDAN, *Analyse*, 2e édit., t. I, p. 276. Ce théorème jouera un rôle important dans la théorie des séries multiples absolument convergentes.

assez grand pour que la somme V_{ip} des p premiers termes de la série V_i renferme tous les termes de U_n qui figurent dans V_i. Par suite les termes $v_{ip}, v_{ip+1}, \ldots, v_{ip+p'}$ seront des éléments $u_\alpha, \ldots, u_\lambda$ de la série donnée, dont les indices surpasseront tous $n-1$. On aura donc, quel que soit p',

$$|v_{ip}|+\ldots+|v_{ip+p'}| = |u_\alpha|+\ldots+|u_\lambda| < |u_n|+|u_{n+1}|+\ldots.$$

A cause de la convergence absolue de la série (u), cette dernière somme descend au-dessous de tout nombre donné, quand n est suffisamment grand : *a fortiori* en sera-t-il de même du premier membre de l'inégalité. Il suffit de faire grandir indéfiniment d'abord p, et ensuite n, pour en déduire la convergence absolue de la série V_i.

Nous en représenterons la somme par V_i.

2° *La série* $V_1+V_2+\ldots+V_l+\ldots$ *converge et a même somme que la série* (u). — Considérons une somme U_n et choisissons l et p assez grands pour que la somme

$$V_{1p}+V_{2p}+\ldots+V_{lp}$$

renferme tous les termes contenus dans U_n. La différence

$$\Delta = V_{1p}+\ldots+V_{2p}-U_n = u_\alpha+\ldots+u_\lambda$$

ne renfermera que des termes $u_\alpha, \ldots, u_\lambda$, dont les indices surpasseront $n-1$, et l'on aura

$$|\Delta| \overline{\overline{<}} |u_\alpha|+\ldots+|u_\lambda| < |u_n|+|u_{n+1}|+\ldots.$$

A cause de la convergence absolue de la série (u), on peut choisir n assez grand pour que cette dernière somme descende au-dessous de tout nombre donné. Dès lors, si l'on fait croître indéfiniment d'abord p (ce qui transforme V_{lp} en V_l), puis l (ce qui transforme $V_1+\ldots+V_l$ en $V_1+\ldots+V_l+\ldots$, que nous appellerons V), et enfin n, on peut affirmer successivement que les modules des différences

$$|V_1+\ldots+V_l-U_n|, \quad |V-U_n|, \quad |V-U|$$

descendent au-dessous de tout nombre donné.

C'est bien le théorème à établir.

63. Une série semi-convergente à éléments réels renferme des termes positifs et des termes négatifs *en nombre infini;* sinon elle convergerait absolument.

Les deux séries obtenues en prenant séparément les termes positifs et les termes négatifs sont chacune divergentes.

En effet, supposons que, parmi les m premiers termes, il y en ait p positifs et n négatifs; soient s_p, s_n, s_m, σ_m la somme des p premiers termes positifs, la somme des modules des n premiers termes négatifs, la somme des m premiers termes de la série donnée et la somme de leurs modules. On a

$$s_m = s_p - s_n, \qquad \sigma_m = s_p + s_n$$

et, par suite,

$$s_p = \frac{1}{2}(\sigma_m + s_m), \qquad s_n = \frac{1}{2}(\sigma_m - s_m).$$

Pour m infini, σ_m augmente indéfiniment et s_m tend vers une limite; donc s_n et s_p croissent indéfiniment : les séries correspondantes divergent.

Théorème III. — *En rangeant dans un ordre convenable les termes d'une série semi-convergente* (u), *on peut lui donner une infinité de valeurs et même, si les éléments sont réels, une valeur arbitraire.*

Posons

$$u_n = a_n + ib_n, \qquad |a_n| = \alpha_n, \qquad |b_n| = \beta_n.$$

La série $\sum u_n$ étant convergente, il en est de même de chacune des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$. La série $\sum |u_n|$ étant divergente, il en est de même de la série $\sum(\alpha_n + \beta_n)$, qui a ses termes plus grands ou au moins égaux. Donc, l'une au moins des séries $\sum \alpha_n$, $\sum \beta_n$, la première, par exemple, diverge. C'est dire que la série $\sum a_n$ est semi-convergente, et par suite que ses termes positifs a'_0, a'_1, ... et ses termes négatifs a''_0, a''_1, ... ont séparément des sommes infinies.

Choisissons arbitrairement un nombre A, positif, par exemple. Prenons dans la suite a'_0, a'_1, ... des termes en nombre suffisant (mais en nombre le plus petit possible) pour que la somme $a'_0 + a'_1 + \ldots$ surpasse A; ajoutons des termes négatifs a''_0, a''_1, ... en nombre suffisant (mais en nombre le plus petit possible) pour que la somme nouvelle descende au-dessous de A. D'après la même loi, recommençons à ajouter des termes de la première suite, de la seconde, etc.

On détermine ainsi un ordre de rangement des éléments réels a de la série donnée : *dans cet ordre, leur somme converge vers* A.

En effet, les sommes successives oscillent autour de A; elles s'en rapprochent indéfiniment, puisque la différence entre l'une de ces sommes et A est inférieure, en valeur absolue, au module du dernier des termes employés, a'_l ou a''_k, et que ces termes tendent vers zéro à cause de la convergence de la série (a).

Ainsi, quand les termes de la série (u) sont placés dans l'ordre que nous avons défini, sa somme a pour valeur $A + iB$, A étant arbitraire et B ayant une valeur déterminée, qui varie avec le nombre A choisi [1].

---

[1] Ce théorème et cette démonstration sont de Riemann [*Dissertation inaugurale*, 1854 (*Œuvres*, trad. Laugel, p. 235)].

Exemple. — En rangeant convenablement les termes de la série harmonique, on peut l'amener à avoir pour somme $\log 2 + \frac{1}{2}\log\frac{p}{q}$ (au lieu de $\log 2$), pourvu que dans les $p+q$ premiers termes il y en ait p positifs et q négatifs. Quand p et q croissent indéfiniment de manière que leur rapport tende vers le nombre arbitraire α, on approche d'une infinité de limites. (Ce résultat, obtenu par Ohm à l'aide du calcul intégral, est démontré d'une façon élémentaire dans l'Ouvrage de M. Tannery, *Introduction, etc.*, p. 168.)

Voici une condition *suffisante* indiquée par M. Borel pour qu'un changement dans l'ordre des termes soit légitime (*B. D.*, 1890, p. 97).

Changer l'ordre des termes revient à établir entre les entiers n et p une correspondance univoque telle que le terme de rang n de la première série devienne le terme de rang p de la seconde. Posons $|n-p| = \delta_n$, et appelons ce nombre le *déplacement* du terme u_n.

Pour qu'un changement dans l'ordre des termes d'une série n'altère pas sa valeur, IL SUFFIT *que l'on ait, quel que soit l'entier positif q,*

$$\lim_{n=\infty} |\delta_{n-q} u_n| = 0 \quad \text{ou bien} \quad \lim_{n=\infty} |\delta_n u_{n+q}| = 0,$$

c'est-à-dire il suffit que le produit de la valeur absolue du terme de rang n par

64. Une série *à termes variables* converge dans un domaine lorsqu'elle converge en tous ses points. Les notions de convergence et de convergence absolue sont insuffisantes pour trancher des questions importantes relatives à ces séries.

Par exemple, une série convergente et à éléments continus (ou holomorphes) dans un domaine, est-elle continue (ou holomorphe) dans ce domaine ([1])? Pour intégrer ou dériver une série, suffit-il de l'intégrer ou de la dériver terme par terme?

Leur solution repose sur la notion de *convergence uniforme*.

Représentons par s_n et s la somme des n premiers termes et la somme d'une série à éléments variables, convergente dans un ensemble. On dira que cette série *converge uniformément* dans cet ensemble, si à tout nombre positif donné ε on peut faire correspondre un entier positif N, *le même dans tout l'ensemble,* tel que l'on ait

$$|s - s_n| < \varepsilon$$

pour toute valeur de n supérieure à N ([2]).

En général, à chaque point z où l'on étudie la convergence, correspondent des nombres N qui dépendent de z (et de ε) : ce qui caractérise la convergence uniforme, c'est qu'en chaque point

---

le déplacement maximum des termes qui le précèdent, ou bien du déplacement du terme de rang n par la valeur absolue maximum des termes qui le suivent, tende vers zéro lorsque n croît indéfiniment (ces deux conditions sont équivalentes).

Cf. aussi SCHLÖMILCH, *Zeitschrift für Math.*, 1873, p. 520. — PRINGSHEIM, *M. A.*, t. XXII, p. 455, etc.

(1) C'est Abel qui, à l'occasion d'une inexactitude de Cauchy, attira l'attention sur les séries non continues à termes continus (*Œuvres*, t. I, p. 224). Ainsi la série

$$1 - x + x(1-x) + \ldots + x^n(1-x)\ldots \qquad (s_n = 1 - x^n)$$

converge pour $0 \lesseqgtr x \lesseqgtr 1$; elle a pour somme 1 ou 0 suivant que l'on a $0 \lesseqgtr x < 1$ ou bien $x = 1$. Les séries trigonométriques en fournissent d'innombrables exemples.

La dénomination de *convergence uniforme* (*gleichmässige Konvergenz*) est due à Weierstrass.

(2) C'est la notion exposée page 35 : s_n doit tendre uniformément vers s *pour n infini.*

ε étant donné, il y a, en chaque point où la série converge, un entier minimum N_ε fonction de z, tel que l'on ait $|r_n| < \varepsilon$ pour $n > N_\varepsilon$. Quand ces nombres N_ε ont une limite supérieure *finie,* la convergence est uniforme.

Une série converge uniformément *dans le voisinage* d'un point a, lorsqu'il

on peut les choisir indépendants de z. Ainsi la somme d'une série uniformément convergente est représentée par la somme de ses n premiers termes avec une approximation dont la limite supérieure ε est la même dans tout l'ensemble.

La notion de convergence uniforme s'applique aux séries dont les éléments dépendent d'un nombre quelconque de variables.

65. Pour décider de la convergence d'une série, parfois on applique la définition directe de la convergence, ce qui exige la connaissance du reste ou d'une limite de son module; plus souvent, on utilise des théorèmes, qui résultent pour la plupart de la *comparaison* de la série proposée avec des séries connues.

De même, pour reconnaître si une série converge uniformément, rarement on se sert du reste; voici une remarque d'une application fréquente :

Une série (u) à termes variables converge absolument et uniformément dans un ensemble, si dans cet ensemble les modules de ses termes ne dépassent pas les valeurs des termes d'une série numérique convergente (a), à termes positifs ou nuls.

En effet, la convergence absolue est évidente.

---

existe un nombre ρ tel que la convergence soit uniforme aux points $|z-a| \overline{\overline{<}} \rho$. L'ensemble des nombres ρ relatifs à un point a a une limite supérieure, que nous appellerons $R(a)$.

Weierstrass a démontré ce théorème :

Une série, uniformément convergente dans le voisinage de chaque point d'un domaine fermé, converge uniformément dans ce domaine.

Pour le prouver, Weierstrass procède comme procédait Lüroth (*M. A.*, t. VI, p. 319) pour établir la continuité uniforme d'une fonction continue de deux variables (*voir* plus haut, p. 45, note); par suite, il montre que la limite supérieure $R(z)$ relative à chaque point z est *fonction continue* de z. Dès lors il y a un point du domaine ou de sa frontière où l'ensemble de ces nombres $R(z)$, tous positifs, *atteint effectivement un minimum* qui est positif, et non pas nul (WEIERSTRASS, *Œuvres*, t. II, p. 203).

M. Pringsheim (*M. A.*, t. LXIV, p. 80) y parvient par une méthode analogue à celle suivie par Heine (*J. de Crelle*, t. 74, p. 188) pour déduire la continuité uniforme de la continuité.

La définition de convergence uniforme montre du reste que si une série converge uniformément en diverses régions, elle converge uniformément dans le domaine formé par leur ensemble.

Pour établir la convergence uniforme, on remarque que l'hypothèse $|u_n| \leqq a_n$ donne

$$|u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}| \leqq a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}.$$

En vertu de la convergence de la série (a), son reste n'atteint pas ε, pour les valeurs de n supérieures à un entier fixe : *a fortiori*, en est-il de même du reste de la série (u), pour toutes les valeurs de z considérées ([1]).

Remarques :

I. Ici les hypothèses entraînent la convergence absolue et la convergence uniforme. Ce n'est pas là un fait général : une série peut être uniformément convergente sans converger absolument, et réciproquement ([2]).

([1]) Nous utiliserons souvent la convergence uniforme de la série $\sum z^n (z < 1)$: elle résulte soit de la *discussion du reste*, soit de la *comparaison* de la série avec la série numérique $\sum r^n (1 > r > |z|)$.

Considérons les deux séries pour lesquelles on a respectivement

$$s_n = \frac{x}{1+x^2} - \frac{nx}{1+n^2x^2}, \quad s = \frac{x}{1+x^2}, \quad r_n = \frac{nx}{1+n^2x^2}$$
$$s_n = \frac{n^2x}{1+n^2x^2}, \quad s = 0, \quad r_n = -\frac{n^2x}{1+n^2x^2} \qquad (0 \leqq x \leqq 1).$$

C'est dans le voisinage du *seul* point $x = 0$ qu'elles ne convergent pas uniformément (p. 36). Il suffit d'y remplacer x par $\sin^2 k\pi x$, k désignant un entier positif fixe, pour obtenir des séries qui ne convergent pas uniformément dans le voisinage des $k+1$ points $\left(0, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \ldots, 1\right)$.

Enfin, la théorie des ensembles denses dans un intervalle permet d'en déduire des séries, convergentes dans un intervalle, qui ne convergent uniformément dans aucun intervalle fini. *Cf.* PAINLEVÉ, *Sur les lignes singulières, etc.* (*A. T.*, 1888, B., p. 10). — OSGOOD, *Non uniform convergence* (*American Journal*, 1897, p. 155). On y trouvera, pour diverses séries, le tracé des familles de courbes $y = r_n(x)$ (courbes se rapportant à diverses valeurs de n), tracés qui aident à se rendre compte géométriquement de la convergence non uniforme.

([2]) *Exemple.* — La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n}$ converge uniformément, mais non absolument, dans tout intervalle réel. (Pour la réciproque, *voir* les exemples donnés plus haut.)

Ce qui est vrai, c'est qu'une série absolument convergente, dont les éléments, ainsi que la somme de leurs modules, sont continus dans un domaine fermé, converge uniformément dans ce domaine ainsi que la série formée par les modules de ces éléments (*cf.* PRINGSHEIM, *M. A.*, t. XLIV, p. 82).

II. Le théorème s'applique aux fonctions de plusieurs variables : si, pour un ensemble quelconque de leurs valeurs, on peut prendre la même série de comparaison, la série donnée converge absolument et uniformément dans l'ensemble considéré.

66. A divers points de vue, par exemple pour le rangement des éléments, on pouvait traiter les séries absolument convergentes comme des sommes de termes en nombre limité : les séries à convergence uniforme ont d'autres propriétés qui les rapprochent aussi de ces sommes. Ici, nous en signalerons trois.

Première propriété. (Continuité.) — *Une série à termes continus, uniformément convergente dans un domaine continu et sur sa frontière, est continue dans ce domaine et sur sa frontière.*

Posons

$$s(z) = s_n(z) + r_n(z).$$

A un accroissement Δz donné à z (on suppose que $z + \Delta z$ ne sort pas du domaine considéré) correspondent pour s, s_n, r_n des accroissements tels que l'on ait

$$\Delta s = \Delta s_n + \Delta r_n = \Delta s_n + (r_n + \Delta r_n) - r_n,$$
$$|\Delta s| \overline{\overline{<}} |\Delta s_n| + |r_n + \Delta r_n| + |r_n|.$$

La somme s_n d'un nombre *fini* d'éléments continus est uniformément continue : on peut donc choisir Δz assez petit pour que, dans tout le domaine, $|\Delta s_n|$ n'atteigne pas un nombre positif donné ε, pour toute valeur de n supérieure à un nombre fixe.

La série converge uniformément : il y a donc un entier fixe N tel que, dans tout le domaine, pour toute valeur de n supérieure à N, $|r_n|$ et $|r_n + \Delta r_n|$ restent inférieurs à ε.

Dans tout le domaine, on a donc bien, pour les valeurs de n dépassant un nombre fixe,

$$|\Delta s| < 3\varepsilon \quad (^1).$$

---

(1) Réciproquement, la continuité de la somme d'une série à éléments continus entraîne-t-elle la convergence uniforme de la série? Après quelques hésitations (*cf.* Heine, *J. de Crelle*, t. 71, p. 353), la question a été tranchée négativement.

67. Deuxième propriété. (Intégration.) — *Une série à termes continus, uniformément convergente dans un domaine continu fermé, est intégrable le long de toute ligne finie située dans le domaine; son intégrale peut s'obtenir en faisant la somme des intégrales des divers termes, et la série ainsi formée converge uniformément.*

Supposons d'abord qu'il s'agisse de fonction réelle de variable réelle, et reprenons les notations précédentes, en y remplaçant z par x. Dans l'intervalle fermé (ab), on peut faire correspondre à tout nombre positif ε un entier N, tel que l'on ait

$$|r_n(x)| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad n > \text{N}.$$

---

d'abord par du Bois-Reymond, puis par M. Darboux (*A. E. N.*, 1875, p. 79) et M. G. Cantor (*M. A.*, t. XVI, p. 269).

Ce dernier donne comme exemple la série pour laquelle

$$s = \frac{2x(1-x)}{x^2+(1-x)^2}, \qquad r_n = \frac{2nx(1-x)}{n^2x^2+(1-x)^2} \qquad (0 \leqq x \leqq 1).$$

Il n'y a pas de nombre N assez grand pour que les restes correspondant aux valeurs $n\,(n > \text{N})$ soient tous inférieurs à 1, quelle que soit la valeur de x dans l'intervalle considéré. Les séries étudiées dans la note du n° 65 en fournissent d'autres exemples.

Les points d'un intervalle dans le voisinage desquels *une série continue à éléments continus ne converge pas uniformément* sont dits *points de convergence non uniforme* : M. Osgood les a classifiés et a montré qu'ils ne peuvent former que des ensembles de certains types (par exemple, les points dans le voisinage desquels, pour certaines valeurs de n, s_n peut dépasser tout nombre donné, forment au plus un ensemble dense nulle part et contenant son dérivé). Cf. *American Journal,* 1897, p. 163.

Surtout depuis les Travaux de M. Osgood, le problème de la représentation des fonctions continues par des séries à éléments continus est considéré comme résolu. La question connexe : *A quelles conditions une fonction discontinue peut-elle être représentée par une série à termes continus?* est traitée dans la Thèse de M. Baire (*Sur les fonctions de variables réelles,* 1899). *Voir* aussi *S. M.,* 1900, p. 173.

C'est la Théorie des ensembles qui a permis d'approfondir ces questions. Par exemple, on a démontré ces théorèmes :

1° *Une série à éléments continus est au plus ponctuellement discontinue.* (On peut le conclure des propositions relatives aux fonctions de deux variables établies dans la Thèse de M. Baire, Chap. II.)

2° *Une série à éléments ponctuellement discontinus, qui converge uniformément, est ponctuellement discontinue* (*cf.* Volterra, *Giorn. di mat.,* 1881, p. 79).

Cf. aussi la question posée par Chessin (*Amer. Journal,* 1896, p. 98 et 128) et la note du n° 72.

La série est à termes continus et converge uniformément : c'est donc une fonction continue, et dès lors intégrable. Les deux expressions déterminées

$$\int_{x_0}^{x} s(x)\,dx, \quad \int_{x_0}^{x} u_0\,dx + \ldots + \int_{x_0}^{x} u_{n-1}\,dx \qquad (a \overline{\gtrless} x_0 < a \overline{\gtrless} b)$$

ont pour différence l'intégrale

$$\delta = \int_{x_0}^{x} r_n\,dx,$$

dont le module tend vers zéro, pour n infini, puisqu'il n'atteint pas $\varepsilon\,|\,b-a\,|$. De là, la justification des trois parties du théorème [1].

Pour l'étendre aux intégrales de séries à termes imaginaires (n° 163) le long d'une courbe (rectifiable) de longueur γ, il suffira d'évaluer les intégrales considérées ci-dessus le long de cette courbe, et de remarquer que la dernière δ n'atteint pas $\varepsilon\gamma$ [2].

---

(1) Ce théorème énonce seulement des conditions pratiques *suffisantes* pour l'intégrabilité, et rectifie, d'après Weierstrass [HEINE, *Ueber trigonometrische Reihen* (*J. de Crelle*, t. 71, p. 353)], la règle indiquée par Moigno (*Leçons de Calcul différentiel et intégral... d'après Cauchy*, t. II, p. 70).

De fait : 1° il n'est pas nécessaire que les termes u_i soient *continus* : le raisonnement donné montre qu'il suffit de les prendre *intégrables* (n° 160) ; 2° la continuité *uniforme* de la série s n'est pas requise, comme l'ont montré du Bois-Reymond, MM. Dini, Stolz, etc.

Aussi M. Osgood a trouvé des conditions suffisantes plus larges permettant d'avoir l'intégrale d'une série en l'intégrant terme par terme. A chaque point, il fait correspondre une fonction dite *fonction de convergence*, qui s'obtient en considérant les limites supérieure et inférieure des *restes* de la série à droite du point, à gauche du point (dans des conditions que nous ne pouvons préciser ici), et en prenant la plus grande en valeur absolue de ces quatre quantités (elle est nulle en chaque point de convergence uniforme; aux autres points, elle mesure le degré de convergence non uniforme). Il en conclut qu'une série non uniformément convergente, si elle représente une fonction continue, peut être intégrée terme par terme, quand *la fonction de convergence est partout finie* (*cf.* OSGOOD, *American Journal*, 1897, p. 164 et 173 ; SCHÖNFLIESS, *Die Lehre, etc.*, p. 225).

(2) Quand une série, dont les termes dépendent de n variables, a ses éléments continus et converge uniformément dans un domaine $\mathfrak{D}$ à n dimensions, les intégrales multiples, relatives à un domaine intérieur à $\mathfrak{D}$, s'obtiennent en faisant la somme, terme par terme, des intégrales des termes de la série. (La démonstration est identique.)

Remarque. — Le théorème revient à assigner des cas où l'on peut *permuter* les symboles de sommation et d'intégration, puisqu'il permet d'écrire

$$\int_{x_0}^{x} s(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} \sum_{n=0}^{\infty} u_n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_n\,dx.$$

68. Troisième propriété. (Dérivation.) — *Une série s à termes continus et analytiques, convergente dans un domaine continu fermé et telle que, en la dérivant élément par élément, on obtienne une série σ à termes continus, uniformément convergente dans ce domaine, a comme dérivée cette série σ pour l'ensemble considéré* (¹).

Supposons encore la variable réelle (les termes de la série s seront des termes continus, ayant des dérivées). Dans l'intervalle fermé (ab), la série

$$\sigma = u'_0 + u'_1 + \ldots + u'_{n-1} + \ldots$$

existe, a ses termes continus et converge uniformément. Elle est donc continue, et dès lors intégrable de x_0 à x $(a \leqq x_0 < x \leqq b)$. D'après la propriété précédente, l'intégrale s'obtient en écrivant

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x} \sigma\,dx &= \int_{x_0}^{x} u'_0\,dx + \int_{x_0}^{x} u'_1\,dx + \ldots \\ &\qquad + \int_{x_0}^{x} u'_{n-1}\,dx + \ldots \\ &= [u_0]_{x_0}^{x} + [u_1]_{x_0}^{x} + \ldots + [u_{n-1}]_{x_0}^{x} + \ldots = s(x) - s(x_0).\end{aligned}$$

C'est dire que, dans l'intervalle (ab), la série s a pour dérivée la série σ, *puisque σ est une fonction continue* (²).

(¹) La série

$$\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots$$

converge pour $0 < x < \pi$; la série ayant pour éléments les dérivées

$$\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \ldots$$

n'est même pas convergente.

(²) Pour qu'il y ait identité entre les notions d'*intégrale* et de *fonction primitive* d'une fonction, il suffit que cette fonction soit *continue*. Mais cette condition n'est pas nécessaire (n° 160, note); aussi, pour cette raison et pour d'autres, le théorème énonce seulement des *conditions pratiques suffisantes*.

Par exemple, il suffirait que la série σ fût uniformément convergente et à

Corollaire. — Ces propriétés étendues aux variables complexes, on pourra en conclure qu'une série s, dans les conditions de l'énoncé, est une *fonction analytique*.

69. *Addition et multiplication des séries.* — Soient les deux séries convergentes

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} u_n, \qquad U' = \sum_{n=0}^{\infty} u'_n.$$

La limite d'une somme est égale à la somme des limites; on a donc

$$U \pm U' = \sum_{n=0}^{\infty} (u_n \pm u'_n),$$

et cette règle d'addition est valable tant que les séries sont *en nombre limité*.

Pour la multiplication, Cauchy a donné une règle simple, applicable quand l'*une au moins des séries*, U par exemple, *converge absolument* (¹). On peut alors écrire

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} u'_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \qquad (v_n = u_0 u'_n + u_1 u'_{n-1} + \ldots + u_n u'_0).$$

En effet, posons

$$U_n = \sum_{n=0}^{n} u_n, \qquad U'_n = \sum_{n=0}^{n} u'_n, \qquad V_n = \sum_{n=0}^{n} v_n,$$

---

termes intégrables (la série s restant à termes continus et ayant des dérivées) pour que la série σ fût la dérivée de s. *Cf.* Darboux, *A. E. N.*, p. 83; 1875. Ou bien encore, si les éléments de la série s ont des dérivées continues et si la série σ est continue, la série σ est la dérivée de la série s, sauf peut-être en des points formant un ensemble dense nulle part et contenant son dérivé.

Si les éléments de la série s, ainsi que la série elle-même, ont des dérivées continues, et si la série σ est continue, cette série σ est la dérivée de la série s. *Cf.* Osgood, *American Journal*, 1897, p. 188.

(¹) La démonstration de Cauchy suppose que *chaque série* converge absolument [cf. *Cours d'Analyse, etc.* (*Œuvres*, 2ᵉ série, t. III, p. 132 et 237); *Résumés analytiques de Turin* (*Œuvres*, 2ᵉ série, t. X, p. 54 et 57)] et, dans ce cas, nous donnerons au nº 128 (en note) un résultat plus général. M. Mertens a montré que la convergence absolue de l'*une des séries* suffisait pour que la règle de Cauchy fût applicable (*J. de Crelle*, t. 79, p. 182).

et ordonnons la différence

$$\Delta = V_{2n} - U_n U'_n,$$

suivant les indices de la lettre u. Il vient

$$\begin{aligned}\Delta = {} & u_0(u'_{n+1} + \ldots + u'_{2n}) + u_1(u'_{n+1} + \ldots + u'_{2n-1}) + \ldots + u_{n-1}(u'_{n+1}) \\ & + u_{n+1}(u'_0 + \ldots + u'_{n-1}) + u_{n+2}(u'_0 + \ldots + u'_{n-2}) + \ldots + u_{2n}(u'_0)\end{aligned}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}|\Delta| < {} & |u_0| \cdot |u'_{n+1} + \ldots + u'_{2n}| \\ & + |u_1| \cdot |u'_{n+1} + \ldots + u'_{2n-1}| + \ldots + |u_{n-1}| \cdot |u'_{n+1}| \\ & + |u_{n+1}| \cdot |u'_0 + \ldots + u'_{n-1}| \\ & + |u_{n+2}| \cdot |u'_0 + \ldots + u'_{n-2}| + \ldots + |u_{2n}| \cdot |u'_0|.\end{aligned}$$

En vertu des hypothèses sur la convergence absolue de la série U et la convergence de la série U′, on peut trouver des nombres fixes A et A′ tels que l'on ait pour toute valeur de m

$$|u_0| + |u_1| + \ldots + |u_m| < \text{A}, \qquad |u'_0 + u'_1 + \ldots + u'_m| < \text{A}',$$

et un nombre n assez grand pour que l'on ait, quel que soit p

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots + |u_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{\text{A} + \text{A}'},$$

$$|u'_{n+1} + u'_{n+2} + \ldots + u'_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{\text{A} + \text{A}'},$$

ε étant aussi petit que l'on veut.

On en déduit

$$|\Delta| < \frac{\varepsilon}{\text{A} + \text{A}'}(|u_0| + \ldots + |u_{n-1}|) + \text{A}'(|u_{n+1}| + \ldots + |u_{2n}|),$$

d'où, *a fortiori*,

$$|\Delta| < \frac{\varepsilon}{\text{A} + \text{A}'}\text{A} + \text{A}'\frac{\varepsilon}{\text{A} + \text{A}'}, \qquad \text{ou} \qquad < \varepsilon.$$

On verrait de même que les différences $V_{2n+1} - U_{n+1} U'_{n+1}$ tendent vers zéro quand n croît indéfiniment, ce qui justifie la règle énoncée.

La question de la multiplication de deux séries *toutes deux semi-convergentes* est moins simple ([1]).

§ II. — Séries entières.

Parmi les séries à éléments variables, on considère spécialement celles qui ont pour termes des polynomes, des fractions rationnelles, certaines transcendantes ([2]) : elles fournissent pour les fonctions des *représentations* analytiques d'un intérêt capital.

Les plus intéressantes sont celles qui procèdent suivant les puissances positives croissantes de la variable : on les appelle

---

([1]) Abel a montré, en s'appuyant sur les propriétés des séries entières, que, *si les* trois *séries* U, U', V *convergent,* on a

$$UU' = V$$

(*Œuvres,* t. I, p. 226). Voir *infra,* n° 74. M. Cesàro a prouvé ce théorème d'Abel par un procédé analogue à celui qu'a employé M. Jensen pour établir le théorème de Cauchy-Mertens (*B. D.,* 1890, p. 114).

Pour énoncer les résultats dans le cas *où seules les deux séries* U *et* U' *convergent,* M. Cesàro introduit la notion de *série simplement indéterminée.* Il entend par là une série divergente dans laquelle le rapport $\sigma_n = \frac{s_1 + \ldots + s_n}{n}$ tend vers une limite σ; on l'appelle la *somme de la série* (quand les s_n ont une limite, les σ_n ont la *même* limite). *La somme ainsi définie de la série est encore égale au produit des séries* U *et* U'.

Cf. aussi Pringsheim, *M. A.*, t. XXI, p. 327, et t. XXVI, p. 157. — Voss, *M. A.*, t. XXIV, p. 42. — Cajori, *American Journal,* t. XV, p. 339 (généralisant une règle de Voss, il obtient divers types de conditions nécessaires et suffisantes pour que la règle de Cauchy soit applicable à deux séries semi-convergentes, lorsque l'une d'elles devient absolument convergente par l'association de ses termes en groupes renfermant chacun un nombre fini d'éléments). — Mertens, *J. de Crelle,* t. 117, p. 169. — Bourlet, *B. D.,* 1889, p. 55. — *N. A. M.*, 1887, p. 210.

Il y a bien des manières, nous le verrons plus loin, de considérer des séries *divergentes* comme définissant des fonctions. Dans ces définitions, on fait en sorte que les *formes opératoires* habituelles concernant les séries, par exemple la règle de Cauchy, subsistent. Aussi, avec de telles définitions, *quand deux séries divergentes définissent chacune une fonction, la série divergente obtenue par la règle de Cauchy définit elle-même une fonction qui est le produit des deux premières.* (Padé, *A. M.,* t. XVIII, p. 105. — Borel, *Séries divergentes,* p. 103, etc.)

([2]) De ces transcendantes, les plus usitées sont les fonctions circulaires, les fonctions sphériques, les fonctions cylindriques.

séries entières (¹). Introduites par les développements de Mac-Laurin, elles servent de point de départ, depuis Weierstrass, à la théorie des *fonctions analytiques*. Nous prendrons la notation de Weierstrass, et nous poserons (²)

$$\mathfrak{P}(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots.$$

70. Théorème I. (Abel.) — *Une série entière telle que les modules de ses termes restent, à partir d'un certain rang et pour une valeur z_0 de la variable, inférieurs ou égaux à un nombre fixe* M, *converge en tout point dont le module n'atteint pas* $|z_0|$.

En effet, en ces points, la progression géométrique de terme général $M\dfrac{|z|^n}{|z_0|^n}$ forme une série convergente. D'après l'hypothèse $|a_n z_0^n| \leqq M$, les modules des termes de la série entière donnée ne dépassent pas, à partir d'un certain rang, les valeurs des termes de cette progression. Donc, la série formée par les modules des termes de la série donnée converge; et dès lors aussi cette série.

Corollaire. — Ce théorème conduit à la notion fondamentale de *cercle de convergence.*

Supposons la série donnée convergente au point z_0. Le module du terme général $a_n z_0^n$ tend alors vers zéro; *a fortiori* reste-t-il

---

(¹) Newton avait entrevu le rôle en Algèbre des séries entières, en remarquant que des séries de puissances (puissances de 10^{-1}) servent en Arithmétique à exprimer toutes les fractions. Leur étude systématique a été faite par Cauchy (*Œuvres*, 2ᵉ série, t. III, p. 135 et 239, et t. X, p. 16, 130, 175, etc.) et par Abel (*Recherches sur la série du binome*, 1826; *Œuvres*, 2ᵉ édition, t. I, p. 219). Leur nom est dû à M. Méray.

Les séries de polynomes ou de fractions rationnelles sont un instrument analytique plus général que les séries entières. Mais de cette généralité même résulte la difficulté qu'il y a à leur trouver des propriétés communes : aussi leur théorie n'est qu'ébauchée, alors que depuis longtemps celle des séries entières est achevée dans ses traits essentiels. Nous y reviendrons plus loin.

(²) Nous représenterons souvent les polynomes par $P(z)$, les séries entières par $\mathfrak{P}(z)$, les séries entières convergentes dans tout le plan par $G(z)$. Les théorèmes que nous allons démontrer s'appliqueront aux *séries de puissances* $\mathfrak{P}(z-\xi)$, à l'intérieur de cercles ayant pour centre ξ, et aux séries $\mathfrak{P}\left(\dfrac{1}{z}\right)$ à l'extérieur de cercles ayant pour centre l'origine.

inférieur à un nombre fixe. Donc une série entière, qui converge pour une valeur z_0, converge (absolument) pour les valeurs de module moindre. Réciproquement, une série qui diverge en un point z_1 ne converge en aucun point extérieur au cercle ayant l'origine pour centre et passant par z_1.

C'est dire que la courbe séparant les régions de convergence des régions de divergence (dans l'hypothèse où la série ne converge pas dans tout le plan) *est une circonférence de cercle* (décrite de l'origine), cercle que l'on appelle *cercle de convergence* (1).

La série converge en tout point intérieur à ce cercle, et diverge en tout point extérieur. Sur la circonférence même, il y a doute : la série peut converger ou diverger en tout point, converger en certains points et diverger en d'autres.

Le rayon R du cercle de convergence peut être nul (c'est le cas où la série ne converge pour aucune valeur de z), fini et différent de zéro, infini (c'est le cas de la fonction transcendante entière).

Ainsi, soient les séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Pour la première, $R = 0$; pour les trois suivantes, $R = 1$; pour la dernière, R est infini. La seconde diverge en tout point de la circonférence du cercle de convergence (sur cette circonférence, le module de z^n ne tend pas vers zéro). La troisième converge en

---

(1) On peut présenter comme il suit la définition du *rayon* de ce cercle.

Posons $|z| = r$; faisons croître r à partir de zéro, et considérons pour chaque valeur de r l'ensemble des nombres $|a_n z^n|$ et sa limite supérieure, finie ou infinie, $\varphi(r)$, limite qui ne peut diminuer quand r croît.

Ou bien $\varphi(r)$ reste fini, si grand que soit r. Alors la série converge dans tout le plan.

Ou bien $\varphi(r)$ est infini pour toute valeur de r. La série ne converge en aucun point.

Ou bien $\varphi(r)$ est fini pour certaines valeurs de r et infini pour d'autres valeurs. Les nombres r pour lesquels $\varphi(r)$ reste fini forment une suite continue de grandeurs croissantes, inférieures à un nombre fixe : cette suite a donc une limite supérieure finie R. Aux points $|z| \lesseqgtr R$, $|a_n z^n|$ ne dépasse pas un nombre fixe; donc la série converge aux points $|z| < R$. De même elle diverge aux points $|z| > R$. *Cette limite supérieure* R *est le rayon de convergence.*

tout point de cette circonférence, sauf au point $z = 1$. La quatrième converge en tout point de cette circonférence, puisque la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

71. A l'intérieur de son cercle de convergence, une série entière converge *absolument;* elle converge *uniformément* sur la circonférence et à l'intérieur de tout cercle intérieur à ce cercle.

En effet, soit z un point arbitraire à l'intérieur du cercle de convergence ($|z| = r$) et r_0 un nombre compris entre r et R. La définition du cercle de convergence entraîne la convergence de la série au point r_0 et, par suite, la convergence absolue de la série

$$a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots.$$

Dès lors, il suffit de prendre comme série de comparaison la série numérique convergente

$$|a_0| + |a_1| r + \ldots + |a_n| r^n + \ldots$$

pour établir que la série donnée converge uniformément sur la circonférence r et à son intérieur (p. 122).

72. De la convergence uniforme des séries entières résulte *leur continuité* sur la circonférence et à l'intérieur de tout cercle de rayon moindre que R (¹).

73. Quand une série converge *absolument* en un point z_0, elle converge uniformément dans le cercle passant en ce point et *sur sa circonférence*. Qu'arrive-t-il si la série converge en ce point sans converger absolument?

Les raisonnements précédents établissent la convergence uniforme sur la droite $(0, z'_0)$ qui va de l'origine vers le point z_0 ($|z'_0| < |z_0|$). Un second théorème, dû aussi à Abel, apprend que la convergence uniforme s'étend *jusqu'au point* z_0.

(¹) Soient les coefficients a_n fonctions continues d'une variable ξ. Abel montre (*Œuvres*, t. I, p. 224) que, si l'on suppose z fixe dans le cercle de convergence, la série est fonction continue de ξ. La preuve qu'il en donne est insuffisante, et même son énoncé doit être un peu restreint (DU BOIS-REYMOND, *M. A.*, t. IV, p. 135; PRINGSHEIM, *Mémoires de l'Académie de Munich*, 1897, p. 351).

THÉORÈME II. (ABEL.) — *Une série entière, convergente en un point z_0, converge uniformément sur le rayon qui aboutit en ce point.*

Posons $z = z_0 x$: au segment $(0, z_0)$ correspondra le segment $(0, 1)$. On est ainsi ramené à démontrer que la convergence de la série

$$\mathfrak{P}(1) = a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots$$

entraîne la convergence uniforme de la série

$$\mathfrak{P}(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

dans l'intervalle fermé $(0, 1)$.

Puisque la série $\mathfrak{P}(1)$ converge, à tout nombre positif ε correspond un entier N tel que, pour toute valeur de n supérieure à N, on ait

$$|r_n(1)| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad |r_{n+q}(1)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donnons à q les valeurs $1, 2, \ldots, p+1$: ces inégalités combinées montrent que les sommes

$$\sigma_0 = a_n, \qquad \sigma_1 = a_n + a_{n+1}, \qquad \ldots, \qquad \sigma_p = a_n + \ldots + a_{n+p}$$

ont leurs modules inférieurs à ε. Introduisons ces sommes dans l'expression du reste $r_n(x)$ de la série $\mathfrak{P}(x)$; il vient

$$\begin{aligned} r_n(x) &= a_n x^n + \ldots + a_{n+p} x^{n+p} + \ldots \\ &= \sigma_0 x^n + (\sigma_1 - \sigma_0) x^{n+1} + \ldots + (\sigma_p - \sigma_{p-1}) x^{n+p} + \ldots \\ &= x^n (1 - x)(\sigma_0 + \sigma_1 x + \ldots), \end{aligned}$$

et par suite

$$|r_n(x)| < x^n (1 - x)\varepsilon(1 + x + \ldots) \qquad \text{ou} \qquad < \varepsilon x^n \qquad (0 \leq x < 1).$$

On avait déjà

$$|r_n(1)| < \varepsilon.$$

Donc, dans l'intervalle $(0, 1)$, le module du reste de la série est inférieur au nombre fixe ε.

Remarque. — Une série à termes continus, uniformément convergente, est continue : la série entière $\mathfrak{P}(z)$ est donc continue sur le segment $(0, z_0)$. Aussi Abel énonçait-il son théorème en

disant : *la limite des valeurs que prend une série entière, convergente en z_0, quand z tend vers z_0 en suivant le rayon* $(0, z_0)$, *est égale à la valeur de la série au point z_0.*

Exemple. — Nous démontrerons la formule (n° 179)

$$(1) \qquad \operatorname{arc\,tang} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots \qquad (|x| < 1).$$

Le second membre converge encore pour $x = 1$; *c'est une série entière :* aussi, d'après le théorème d'Abel, on peut égaler les valeurs limites des deux membres et écrire

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots.$$

Pour $-\pi < x < \pi$, on démontre la relation (n° 84)

$$(2) \qquad \frac{1}{2}x = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \ldots.$$

Le second membre converge encore pour $x = \pi$; ce n'est pas une série entière : aussi *ne sait-on pas, a priori,* si les deux membres sont encore égaux pour la valeur limite π. De fait, l'égalité n'est plus vraie ([1]).

En d'autres termes, la série (1) est convergente $(0 \leqq x \leqq 1)$ et est continue; la série (2) est convergente $(0 \leqq x \leqq \pi)$ sans être continue.

74. Comme application des théorèmes d'Abel, on peut démontrer que, *si les trois séries* (p. 128)

$$U = \sum u_n, \qquad U' = \sum u'_n, \qquad V = \sum (u_0 u'_n + \ldots + u_n u'_0)$$

sont convergentes, la dernière représente le produit des deux autres.

En effet, la convergence de ces séries entraîne la convergence

---

([1]) C'est l'exemple donné par Abel (*Œuvres*, t. I, p. 225).

Abel laisse de côté le cas où la variable atteint le point z_0 *en s'écartant du rayon* qui aboutit en z_0. M. Picard a montré que la convergence uniforme subsiste sur toute ligne aboutissant en z_0, *pourvu qu'elle ne soit pas tangente en ce point au cercle de convergence* (*Analyse*, t. II, p. 73), et M. Pringsheim qu'elle s'étend à tout triangle $z_0 z_1 z_2$ (côtés inclus), z_0 étant un point de convergence ($|z_1|$ et $|z_2| < |z_0|$) (*Mém. de l'Ac. de Munich*, 1897, p. 347).

absolue des séries

$$f(z) = \sum u_n z^n,$$

$$\varphi(z) = \sum u'_n z^n,$$

$$\psi(z) = \sum (u_0 u'_n + \ldots + u_n u'_0) z^n$$

aux points $|z| < 1$. Donc en ces points le théorème de Cauchy (p. 128) donne

$$f(z)\varphi(z) = \psi(z).$$

Les séries U, U′, V convergent; par suite les séries f, φ, ψ ont pour valeurs limites, au point $z = 1$, les séries U, U′, V (et le produit $f\varphi$ a pour limite le produit UU′). Donc, en égalant les limites de $f\varphi$ et de ψ, on a bien

$$UU' = V \quad [1].$$

75. Une proposition fondamentale de Cauchy (n° 178) permettra de déduire le rayon de convergence d'une série de puissances des *propriétés de la fonction* qu'elle représente.

Inversement, un autre théorème de Cauchy, retrouvé et précisé par M. Hadamard, relie la valeur du rayon de convergence d'une série entière *aux valeurs de ses coefficients* [2].

---

(1) Le premier théorème d'Abel, rapproché de celui de Cauchy (p. 128), montre que dans leurs cercles de convergence, on peut multiplier des séries entières en les traitant comme des polynomes, et ordonner les termes du produit suivant les puissances de la variable : dès lors, on peut agir de même pour élever une série entière à une puissance entière positive, ou effectuer un produit de puissances entières positives de séries entières.

Que peut-on affirmer pour les points de la circonférence du cercle de convergence ? Un changement de variable ramène ce cas à celui du texte.

(2) CAUCHY, *Œuvres*, 2e série, t. III, p. 136 et 239; t. X, p. 130. — HADAMARD, *C. R.*, 1888, 1er semestre, p. 259, et *J. M.*, 1892, p. 107.

Dans beaucoup de questions où interviennent les *fonctions analytiques*, par exemple dans le problème si vaste de l'intégration des équations différentielles, ce qui est connu d'avance, ce sont les valeurs à l'origine de la fonction et de ses dérivées, et par suite les coefficients du développement de l'élément générateur de la fonction. Ainsi, lorsqu'on cherche l'intégrale d'une équation du premier ordre qui prend en un point x_0 la valeur arbitraire $\mathfrak{P}(x_0)$, l'équation fournit les valeurs de $\mathfrak{P}'(x_0)$, $\mathfrak{P}''(x_0)$, ..., et, par suite, on connaît les coefficients a_0, a_1, ... de la série de Taylor initiale, tous dépendant du paramètre x_0.

De là de nombreuses applications de ce théorème.

Considérons la série

$$a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

et la suite infinie, de terme général $\sqrt[n]{|a_n|}$. Quand cette suite contient des termes qui augmentent indéfiniment, la série ne converge pour aucune valeur de z. En effet, si petit que soit $|z|$, on pourra trouver un nombre positif N tel que, pour une infinité de valeurs de n supérieures à N, on ait

$$\sqrt[n]{|a_n|} > \frac{1}{|z|} \quad \text{ou} \quad |a_n z^n| > 1,$$

ce qui prouve la divergence de la série.

Supposons donc que les termes de la suite ne dépassent pas un nombre fixe. Un raisonnement analogue à celui du n° **12** montre qu'elle admet alors *une limite supérieure pour n infini :* on veut dire par là qu'il existe, quel que soit le nombre positif donné ε, un nombre L tel que, si l'on considère les inégalités

$$L - \varepsilon < \sqrt[n]{|a_n|} < L + \varepsilon,$$

on peut satisfaire à la première pour une infinité de valeurs de n à partir d'un certain rang N, à la seconde pour toutes les valeurs de n à partir du même rang (1).

THÉORÈME III. — *Le rayon de convergence de la série est* $\frac{1}{L}$.

---

(1) M. Hadamard ne définit la *limite supérieure pour n infini* que dans les suites discrètes : ses considérations s'étendent au cas d'une variable continue. Dans tout ensemble linéaire, la limite supérieure pour n infini est le plus grand élément de l'ensemble dérivé (ici, des points limites de l'ensemble $\sqrt[n]{|a_n|}$, c'est le plus éloigné de l'origine).

La *limite supérieure* (oberc Grenze) et la *limite supérieure pour n infini* (oberer Limes) coïncident dans les ensembles de nombres qui ne restent pas tous inférieurs à un nombre fixe : c'est l'infini.

On définit de la même manière la *limite inférieure pour n infini.* Dans les suites *convergentes*, les deux limites supérieure et inférieure pour n infini coïncident et coïncident avec la *limite* au sens ordinaire du mot.

Ce que M. Hadamard désigne par *limite supérieure pour n infini,* Cauchy l'appelait *la plus grande des limites;* du Bois-Reymond, *Obere Unbestimmheitsgrenze.* — Sur la généralisation de la notion de limite, *cf.* aussi PEANO, *American Journal,* 1895, p. 37.

En effet, soit

$$|z| = (L + \varepsilon)^{-1} \qquad (\varepsilon > 0).$$

Quel que soit ε, on a pour toute valeur de n à partir d'un certain rang $\sqrt[n]{|a_n|} < L + \frac{\varepsilon}{2}$, et dès lors, aux points z que nous considérons,

$$|a_n z^n| < \left(\frac{L + \frac{\varepsilon}{2}}{L + \varepsilon}\right)^n.$$

En ces points la série converge, puisque le second membre est plus petit que *un*.

De même, comme on satisfait à l'inégalité $\sqrt[n]{|a_n|} > L - \varepsilon$ pour une infinité de valeurs de n, il y aura, pour la valeur $|z| = (L - \varepsilon)^{-1}$, une infinité de termes $a_n z^n$ dont le module dépassera l'unité; la série diverge aux points $|z| > L^{-1}$.

Remarque. — En particulier, si les éléments $\sqrt[n]{|a_n|}$ ont une limite, l'inverse de cette limite donne le rayon de convergence.

Par suite, *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une série de Taylor représente une fonction entière est que la quantité $\sqrt[n]{a_n}$ tende vers zéro pour n infini.*

Si le rapport $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ a une limite, $\sqrt[n]{|a_n|}$ aura aussi une limite et la même limite que ce rapport; le rayon de convergence sera $\lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$.

76. Lemme. — *Les séries obtenues en dérivant ou en intégrant terme par terme une série entière, sont des séries entières ayant même cercle de convergence que cette série.*

Appelons $\mathfrak{P}'(z)$ la série obtenue en dérivant la série donnée $\mathfrak{P}(z)$ terme par terme (le théorème justifiera cette notation). On obtient

$$\mathfrak{P}'(z) = a_1 + 2a_2 z + \ldots + n a_n z^{n-1} + \ldots.$$

L'égalité connue $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, montre que l'on a

$$\lim \text{sup.} \sqrt[n]{|na_n|} = \lim \text{sup.} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

et par suite, d'après le théorème précédent, les rayons de convergence des deux séries $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}'$ sont les mêmes ([1]).

THÉORÈME IV. — *Dans leur cercle de convergence commun, les séries entières obtenues en dérivant et en intégrant terme par terme une série entière,*

$$\ldots,\quad \int \mathfrak{P}(z)\,dz,\quad \mathfrak{P}(z),\quad \mathfrak{P}'(z),\quad \mathfrak{P}''(z),\quad \ldots,$$

sont les dérivées et les intégrales de la série entière.

Le théorème résulte de la juxtaposition du lemme précédent, qui établit la convergence uniforme de ces diverses séries, et des théorèmes généraux sur les séries qui convergent uniformément.

Corollaire. — Une série entière est, à l'intérieur de son cercle de convergence, *une fonction analytique,* ainsi que ses dérivées.

Les coefficients de la série se déduisent des valeurs à l'origine des dérivées de la fonction au moyen des relations

$$a_0 = \mathfrak{P}(0),\qquad a_1 = \mathfrak{P}'(0),\qquad \ldots,\qquad a_n = \frac{1}{n!}\mathfrak{P}^n(0).$$

On peut donc écrire

$$\mathfrak{P}(z) = \mathfrak{P}(0) + z\mathfrak{P}'(0) + \ldots + \frac{z^n}{n!}\mathfrak{P}^n(0) + \ldots \qquad (|z| < R).$$

([1]) Si l'on ne veut pas s'appuyer sur le théorème de Cauchy, on dira :

1° Soit R le rayon de convergence de la série $\mathfrak{P}$; z et z_0 des nombres tels que $|z| < |z_0| < R$. Puisque la série $\mathfrak{P}$ converge en z_0, $|a_n z_0^n|$ ne dépasse pas un nombre fixe M. Aussi la convergence de la série

$$\frac{M}{|z_0|}\left(1 + 2\left|\frac{z}{z_0}\right| + \ldots + n\left|\frac{z}{z_0}\right|^{n-1} + \ldots\right)$$

entraîne-t-elle celle de la série

$$|a_1| + 2|a_2 z| + \ldots + n|a_n z^{n-1}| + \ldots,$$

qui a ses termes moindres. On en déduit la convergence absolue et uniforme de la série $\mathfrak{P}'$, au moins à l'intérieur de tout cercle de rayon inférieur à R.

2° Quant à la série obtenue en intégrant terme par terme la série $\mathfrak{P}$, elle a un cercle de convergence de rayon au moins égal à celui de la série $\mathfrak{P}$. (A partir d'un certain rang, les modules de ses termes sont moindres.)

Ainsi, le rayon de convergence de $\mathfrak{P}'$ doit au moins atteindre R, et ne peut surpasser R. Donc il est égal à R.

Remarque. — Toutes les séries considérées ci-dessus ont le même cercle de convergence : mais en un point de la circonférence de ce cercle une série peut converger, alors que la série dérivée est divergente. Ainsi des deux séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n},$$

au point $z = 1$, la première converge, la seconde diverge.

77. Théorème V. — *Quand une série entière s'annule à l'origine il existe un cercle, concentrique au cercle de convergence, tel que la série ne s'annule en aucun point intérieur à ce cercle autre que l'origine.*

Par hypothèse, $a_0 = 0$. Il peut arriver que quelques autres coefficients a_1, a_2, ..., jusqu'à a_n exclusivement, soient aussi nuls, c'est-à-dire que l'origine soit racine d'ordre n. On a ainsi

$$\mathfrak{P}(z) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \ldots = z^n \mathfrak{Q}(z) \qquad (a_n \lessgtr 0),$$

la série entière $\mathfrak{Q}(z)$ a le même cercle de convergence que $\mathfrak{P}(z)$, et elle ne s'annule plus à l'origine.

$\mathfrak{Q}(z)$ étant continu dans le voisinage de l'origine, au nombre $|a_n|$ correspond un nombre positif δ tel que l'on ait

$$|\mathfrak{Q}(z) - \mathfrak{Q}(0)| < |a_n| \qquad \text{si} \qquad |z| < \delta.$$

Puisque $\mathfrak{Q}(0)$, dont la valeur est a_n, n'est pas nul, $\mathfrak{Q}(z)$ ne s'annule pas dans le cercle de rayon δ : dans ce cercle $\mathfrak{P}(z)$ n'a d'autre zéro que l'origine ([1]).

Corollaires :

I. Le théorème revient à dire que l'origine est un zéro *isolé*. Dès lors, il en est de même de toute racine z_0 d'une fonction holomorphe, puisqu'une fonction, holomorphe au point z_0, est développable suivant les puissances de $z - z_0$ (p. 58).

Les séries entières peuvent avoir une infinité de zéros dans leur

---

([1]) Le rayon δ dépasse un minimum que l'on calculera au n° 139.

cercle de convergence; ces zéros ne peuvent avoir de *point limite* à l'intérieur de ce cercle, mais seulement sur sa circonférence.

II. Une série entière, dont l'un des coefficients a_n est différent de zéro, ne peut s'annuler en une infinité de points ayant l'origine comme point limite (p. 20). C'est dire que réciproquement, si une série s'annule *sur un ensemble ayant l'origine pour point limite,* par exemple sur un arc de courbe passant par l'origine, tous les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ sont nuls. La fonction représentée par la série est nulle en tous les points du cercle de convergence.

On en conclut que deux séries entières, identiques en tous les points d'un ensemble infini ayant l'origine pour point limite, sont identiques dans toute une région. En effet, leur différence, qui est aussi une série entière, est nulle dans l'ensemble considéré, et par suite dans un cercle.

Enfin, on en déduira qu'une fonction n'est développable que d'*une seule manière* en série entière.

§ III. — Produits infinis.

A la théorie des séries se rattache celle des produits infinis [1]. Il y a analogie dans les théorèmes, et à toute série correspond un

---

[1] Depuis longtemps, ils ont été introduits pour la solution des problèmes de quadrature, et spécialement l'évaluation de la surface du cercle. Viète (1646) et Wallis (1659) représentent le nombre π par les formules

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots \qquad \text{(Viète.)}$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdots \qquad \text{(Wallis.)}$$

Peu après, D. Bernoulli se sert de produits infinis dans un problème du calcul des probabilités. Euler fait ressortir l'importance de ce mode de représentation et l'utilise dans l'étude des fonctions trigonométriques. Gauss l'emploie pour définir la fonction eulérienne. Cauchy (*Œuvres*, 2e série, t. III, p. 459) *les rattache aux logarithmes* et donne ainsi le moyen le plus rapide pour l'étude de leurs propriétés (n° 79). Weierstrass (1856, *Œuvres*, t. I, p. 173) en fait une étude *directe*.

Cf. aussi Mittag-Leffler, *A. M.*, t. IV, p. 29. — Pringsheim, *M. A.*, t. XXII, p. 478; t. XXXIII, p. 119; t. XLII, p. 183.

produit infini et réciproquement. De plus si, dans la représentation des fonctions analytiques, la *somme d'un nombre infini d'éléments,* la série joue un rôle fondamental, le *produit d'un nombre illimité de facteurs* est également utile (n° 280 et suiv.).

78. Considérons une suite infinie d'éléments constants, réels ou imaginaires

$$1+u_0, \quad 1+u_1, \quad \ldots, \quad 1+u_n, \quad \ldots \qquad (|1+u_n|>k>0).$$

Effectuons le produit des n premiers éléments et posons

$$P_n=(1+u_0)(1+u_1)\ldots(1+u_{n-1}).$$

Quand n grandit indéfiniment, ce produit peut augmenter indéfiniment, osciller, tendre vers zéro, *tendre vers une limite* P *qui ne soit pas nulle.* Dans ce dernier cas, on dit que *le produit infini est convergent* et a pour valeur P [1].

Ainsi, quand un produit converge, à tout nombre positif ε, on peut faire correspondre un entier N tel que l'on ait

$$|P-P_n|<\varepsilon, \qquad |P_m-P_n|<\varepsilon \qquad (P \lessgtr 0),$$

m et n étant des nombres arbitraires supérieurs à N. Les réciproques sont vraies (pourvu que la limite ne soit pas nulle).

---

[1] L'hypothèse $\lim P_n \lessgtr 0$ (quelques auteurs ne la font pas) a spécialement pour but de laisser exact ce théorème : *Un produit convergent de facteurs, même en nombre infini, n'est pas nul quand tous les facteurs sont différents de zéro.*

Aussi elle est inutile avec les produits *absolument convergents,* car ils ne tendent jamais vers zéro sans qu'un de leurs facteurs soit nul (n° 81).

Exemple. — Des deux produits

$$P_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n},$$
$$\Pi_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{n}$$

pour n infini, le premier diverge (il a zéro pour limite); le second converge. De fait des deux séries formées avec $|u_n|$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots, \qquad 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots,$$

la première diverge, la seconde converge. Aussi aurait-on adopté une autre définition pour le produit convergent (sans modifier celle du produit absolument convergent), que le premier ne serait pas absolument convergent.

Parfois on oppose ces mots *terme* et *facteur* : les quantités u_n sont alors les termes du produit; les quantités $1+u_n$ en sont les facteurs.

79. *La convergence d'un produit infini entraîne celle d'une série.* — En effet, écrivons

$$P_n = P_{n-1}(1+u_{n-1}), \qquad P_n - P_{n-1} = u_{n-1}P_{n-1},$$

et ajoutons membre à membre les égalités analogues, relatives aux entiers inférieurs à n. Il vient

$$P_n = 1 + u_0 + u_1 P_1 + \ldots + u_{n-1}P_{n-1}.$$

C'est dire que, si P_n a une limite, la série

$$S = 1 + u_0 + u_1 P_1 + \ldots + u_n P_n + \ldots$$

est convergente et a pour somme la valeur du produit infini ([1]).

80. *Produits à termes positifs ou nuls.* — Supposons tous les termes u_n positifs ou nuls. Alors, comme le produit P_n ne peut que croître avec n, il sera convergent s'il n'augmente pas indéfiniment.

I. *Pour la convergence, il y a équivalence entre le produit* P *et la série*

$$U = u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots.$$

En effet, la convergence du produit P entraîne celle de la série ci-dessus S. Or on passe de cette série à la série U en en multipliant les termes par des facteurs positifs finis, car ces facteurs, P_n^{-1}, sont les inverses de grandeurs positives au moins égales à l'unité. La série U est donc aussi convergente.

([1]) En s'aidant des logarithmes, on ramène immédiatement la convergence d'un produit infini à celle d'une série, et réciproquement.

En effet, de la définition de P_n, on déduit (*voir* n° 105)

$$\log P_n = \log(1+u_0) + \log(1+u_1) + \ldots + \log(1+u_{n-1}).$$

La question de la convergence du produit P revient à celle de la convergence de la série ayant pour terme général $\log(1+u_n)$.

Inversement, si la série U converge, P_n n'augmente pas indéfiniment. En effet, écrivons

$$\begin{aligned} P_n &= (1+u_0)\ldots(1+u_{n-1}) \\ &= 1+(u_0+\ldots+u_{n-1})+(u_0u_1+\ldots)+\ldots+(u_0u_1\ldots u_{n-1}). \end{aligned}$$

D'où, en vertu de la formule qui donne le développement en série de l'exponentielle réelle

$$P_n < 1+U_n+\frac{U_n^2}{2!}+\ldots+\frac{U_n^n}{n!} < e^{U_n} \qquad (U_n = u_0+\ldots+u_{n-1}).$$

Le produit P_n, qui augmente avec n sans dépasser une quantité fixe e^{U}, tend vers une limite.

II. *On peut modifier l'ordre des facteurs, sans altérer ni la convergence, ni la valeur du produit infini.*

Soit P la valeur d'un produit infini. En en rangeant les *termes* (u) dans un autre ordre (p. 116), la nouvelle suite de termes (v) donne naissance à un produit infini, convergent comme le premier, puisque le produit d'un nombre quelconque de *facteurs* de la seconde suite est inférieur à P. Appelons $\mathfrak{P}$ sa limite. Suivant que l'on passe du premier produit au second, ou inversement, on a

$$\mathfrak{P}_n < P, \qquad \mathfrak{P} \leqq P; \qquad P_n < \mathfrak{P}, \qquad P \leqq \mathfrak{P}.$$

Les deux limites sont bien égales.

81. *Produits absolument convergents.* — Supposons les termes u_n quelconques, réels ou imaginaires. Le produit infini, qui a pour facteur $1+u_n$, est dit absolument convergent, lorsque la série $\sum u_n$ converge absolument. Désormais, nous nous occuperons des produits absolument convergents, à l'exclusion des produits semi-convergents (¹).

(¹) Voici un théorème, dû à Cauchy, relatif aux produits semi-convergents à termes réels.

Lorsque la série à termes réels $\sum u_n$ est semi-convergente, le produit ayant

Un produit infini absolument convergent a une limite (¹). En effet, la convergence de la série $\sum |u_n|$ entraîne celle du produit infini de terme général $1 + |u_n|$ (p. 144) : soit P′ la valeur de cè produit auxiliaire. La comparaison des produits limités

$$P_n = (1 + u_0)\ldots(1 + u_{n-1}), \qquad P'_n = (1 + |u_0|)\ldots(1 + |u_{n-1}|),$$

donne

$$|P_n| \leqq P'_n,$$

et de même, m désignant un nouvel entier

$$|P_m - P_n| \leqq |P'_m - P'_n|.$$

Le second membre tendant vers o, il en de même du premier.

Dans les séries absolument convergentes, on retrouvait quelques propriétés des sommes : de même, les produits absolument con-

---

pour facteur $1 + u_n$ *est semi-convergent ou diverge en ayant zéro pour limite, suivant que la série* $\sum u_n^2$ *est convergente ou divergente.*

Cauchy le démontre, en remarquant que le développement en série de chaque logarithme permet d'écrire

$$\log(1 + u_n) + \ldots + \log(1 + u_{n+p}) = (u_n + \ldots + u_{n+p}) - \frac{1}{2}(u_n^2 + \ldots + u_{n+p}^2)(1 + \varepsilon),$$

ε tendant vers zéro.

Exemple. — Des deux séries

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots, \qquad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots,$$

la première est semi-convergente et la seconde diverge; aussi le produit

$$(1+1)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{4}}\right)\cdots$$

diverge et tend vers zéro. (*Cf.* aussi WEIERSTRASS, *Œuvres*, t. I, p. 175; PRINGSHEIM, *M. A.*, t. XLIV, p. 413.)

(¹) Pour affirmer que cette limite est *différente de zéro*, il faut supposer de plus que pour *tous* les termes on a

$$|1 + u_n| > k > 0,$$

afin qu'aucun des facteurs du produit ne soit nul. Quand cette inégalité n'est pas vérifiée dès le début, comme elle est toujours vraie à partir d'un certain rang, on peut séparer le produit en deux autres, dont l'un aura une limite différente de o.

vergents sont assimilables à certains points de vue aux produits d'un nombre limité de facteurs [1].

1° *La limite d'un produit est indépendante de l'ordre des facteurs.*

2° *Pour que le produit soit nul, il faut et il suffit que l'un des facteurs soit nul.*

3° *On peut remplacer des facteurs en nombre limité par leur produit effectué.*

1° Si le produit P, de terme général $(1+u_n)$ converge absolument, il en est de même de la série (u). Changeons l'ordre des termes de cette série. A la nouvelle série (v) correspond un produit infini convergent $\mathfrak{P}$: donc le produit primitif *ne perd pas sa convergence* lorsqu'on intervertit l'ordre de ses facteurs.

Sa valeur n'est pas altérée. — En effet, désignons par P' et $\mathfrak{P}'$ les limites des produits ayant pour terme général $1+|u_n|$ et $1+|v_n|$: elles sont les mêmes (p. 144). Donc, à tout nombre positif donné ε correspond un entier N tel que l'on ait, pour toutes les valeurs de m et de n supérieures à N,

$$|P'_m - \mathfrak{P}'_n| < \varepsilon.$$

Mais en supposant m assez grand pour que tous les facteurs de $\mathfrak{P}'_n$ figurent dans P'_m, on a aussi

$$|P_m - \mathfrak{P}_n| \leqq P'_m - \mathfrak{P}'_n.$$

On en conclut

$$|P_m - \mathfrak{P}_n| < \varepsilon,$$

ou bien, en faisant grandir indéfiniment d'abord m, puis n,

$$|P - \mathfrak{P}_n| \leqq \varepsilon, \qquad |P - \mathfrak{P}| \leqq \varepsilon \quad (^2).$$

---

(1) *Cf.* TANNERY et MOLK, *Éléments de la théorie des fonctions elliptiques*, t. I, p. 9 et 119.

(2) La réciproque est vraie : *Pour qu'un produit converge et ne change pas de valeur quel que soit l'ordre de ses facteurs, il doit converger absolument.*

Voici un exemple de série semi-convergente à laquelle ne correspond pas de produit convergent. Soit $\sum a_n$ une série divergente dont tous les termes ont

2° A partir d'un certain rang, on a toujours $|u_n| < 1$, puisque les termes (u) tendent vers zéro. Ne nous occupons, dans le produit infini, que du produit P′ des facteurs dont les termes satisfont à cette condition : les autres sont en nombre fini et peuvent être groupés à part dans un produit P″. Je dis que le produit P′ *n'est pas nul.*

En effet, on peut écrire

$$\frac{1}{P_n} = \left(1 - \frac{u_0}{1+u_0}\right)\left(1 - \frac{u_1}{1+u_1}\right)\cdots\left(1 - \frac{u_{n-1}}{1+u_{n-1}}\right).$$

La convergence de la série $\sum |u_n|$ entraîne celle de la série $\sum \left|\frac{u_n}{1+u_n}\right|$, puisque le rapport des modules des termes correspondants a pour limite l'unité. Donc le produit infini $\frac{1}{P'}$ n'augmente pas indéfiniment : P′ ne tend pas vers o.

Revenons au produit P′P″ : pour qu'il soit nul, il faut et il suffit que l'on ait $P'' = 0$, c'est-à-dire que l'un des facteurs de P″ et dès lors du produit infini P soit nul.

3° Cette troisième partie est évidente pour les séries à termes tous positifs; on y ramène assez aisément le cas général.

82. *Produits uniformément convergents.* — Supposons que les termes u_n dépendent d'une ou de plusieurs variables. Le produit infini, de terme général $(1 + u_n)$, supposé absolument convergent en chaque point d'un ensemble et dès lors dans l'ensemble, est *uniformément convergent* dans cet ensemble, lorsqu'à

---

même signe et telle que $\lim a_n = 0$; considérons la série

$$\lim_{p=\infty}\left[\sum_{n=0}^{p}(\sqrt{a_n}) - \sum_{n=0}^{p}(\sqrt{a_n})\right].$$

Elle est semi-convergente; de fait le produit correspondant

$$\lim_{p=\infty}\left[\prod_{n=0}^{p}(1+\sqrt{a_n})\prod_{n=0}^{p}(1-\sqrt{a_n})\right] = \lim_{p=\infty}\prod_{n=0}^{p}(1+a_n)$$

n'est pas convergent, puisqu'il est égal à zéro ou à l'infini suivant que les termes a_n sont tous négatifs ou tous positifs.

tout nombre positif donné ε on peut faire correspondre un entier positif *fixe* N tel que l'on ait dans tout l'ensemble

$$|P - P_n| < \varepsilon \qquad (n > N).$$

Revenons à la série auxiliaire

$$S = 1 + u_0 + u_1 P_1 + \ldots + u_n P_n + \ldots.$$

Dans tout ensemble où P converge, elle est elle-même convergente (p. 143). Si elle converge uniformément, il en est de même du produit P, puisque le produit et la série ont même limite.

En particulier, lorsque dans un ensemble un produit infini a ses termes continus et converge uniformément, il définit une fonction continue dans l'ensemble (p. 124).

Voici deux remarques utiles pour établir *par comparaison* la convergence uniforme d'un produit infini :

1° *Un produit infini converge absolument et uniformément dans un ensemble, s'il existe une série numérique convergente, à termes a_n positifs ou nuls, telle que dans l'ensemble on ait $|u_n| \leqq a_n$.*

En effet, cette hypothèse entraîne d'abord la convergence absolue de la série (u), et dès lors celle du produit infini considéré. Il suffit ensuite de comparer ce produit au produit numérique convergent de terme général $1 + a_n$, pour en déduire l'uniformité de la convergence.

2° *Un produit infini* P *converge absolument et uniformément dans un ensemble, si dans cet ensemble la série $\sum |u_n|$ converge uniformément et a une somme inférieure à un nombre fixe* M.

En effet, d'abord le produit P converge absolument. De plus, les produits $|P_1|$, $|P_2|$, ..., étant tous inférieurs à un nombre fixe e^M (p. 144), la convergence uniforme de la série $\sum |u_n|$ entraîne la convergence et la convergence uniforme de la série $\sum |u_n P_n|$, puis celle de la série auxiliaire S, et enfin celle du produit P.

§ IV. — Séries trigonométriques.

Après les séries entières, les développements les plus intéressants sont fournis par les séries trigonométriques. Elles sont de la forme

$$(1)\quad \begin{cases} \sigma(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_1\cos x + a_2\cos 2x + \ldots + a_n\cos nx + \ldots \\ \qquad + b_1\sin x + b_2\sin 2x + \ldots + b_n\sin nx + \ldots \end{cases} \quad (x \text{ réel}).$$

Au point de vue théorique, elles ont joué un rôle considérable dans l'évolution de l'idée de fonction, soit en aidant à dégager cette notion de restrictions qui en diminuaient la généralité, soit en appelant l'attention sur l'inexactitude d'assertions qui pouvaient paraître évidentes et sur les précautions à prendre dans le maniement des séries [1].

Dans les applications, leur importance n'est pas moindre, comme le montre cette proposition énoncée par Fourier (1807) :

Une fonction arbitraire, continue ou non, peut être représentée dans tout intervalle par une série trigonométrique [2].

Donnons un rapide historique de cette question de la représentation des fonctions par des séries trigonométriques [3].

Elle avait pris naissance au milieu du XVIIIe siècle, à l'occasion de recherches *sur les vibrations d'une corde élastique tendue.*

---

(1) C'est en étudiant des séries trigonométriques qu'Abel vit les lacunes de certaines propositions de Cauchy relatives à la continuité (p. 135), signala l'insuffisance des démonstrations de la théorie des séries et indiqua l'origine de paradoxes inexpliqués jusque-là; ce fut à leur occasion que Cauchy précisa ses théorèmes sur la dérivation et l'intégration des séries.

(2) Par *fonction arbitraire,* Fourier désigne une fonction qui n'est assujettie à aucune loi analytique, c'est-à-dire dont la manière d'être entre deux valeurs n'entraîne aucune restriction relative à sa détermination entre deux autres valeurs. La proposition de Fourier doit être restreinte, comme nous le dirons : toute fonction discontinue, et même toute fonction continue (pour ces dernières, *cf.* du Bois-Reymond, *M. A.,* t. X, p. 443) n'est pas développable en série trigonométrique.

(3) Il faut lire celui que Riemann a placé au début de son Mémoire : *Sur la représentation des fonctions par des séries trigonométriques* (*Œuvres,* p. 225). On le complétera par l'essai historique de Sachse, *B. D.*, 1880, p. 43 et 83.

Supposons que la corde en se déplaçant reste dans un plan invariable, le plan des xy, et s'écarte peu de sa position d'équilibre, l'axe des x : elle est fixée en deux points $x = 0$, $x = \lambda$ de cet axe, et a sa position initiale définie par une relation $y = f(x)$.

On démontre alors qu'au temps t, les coordonnées de ses points vérifient sensiblement une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \mu^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

(μ est indépendant de t et, si la corde a une épaisseur uniforme, indépendant de x).

Quelle en est l'intégrale générale?

Le problème fut résolu d'abord par d'Alembert (¹). Daniel Bernoulli (²), utilisant une remarque de Taylor, donna une solution de forme toute différente : il montra que l'équation est satisfaite par des produits du type

$$\cos\frac{n\pi\mu t}{\lambda}\sin\frac{n\pi x}{\lambda}, \quad \sin\frac{n\pi\mu t}{\lambda}\sin\frac{n\pi x}{\lambda}$$

et dès lors, puisqu'elle est homogène et linéaire, par des sommes en nombre arbitraire d'expressions de cette nature. Il fut ainsi amené à prendre comme intégrale générale la série

$$y = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi\mu t}{\lambda} + b_n \sin\frac{n\pi\mu t}{\lambda}\right)\sin\frac{n\pi x}{\lambda}.$$

Pour $t = 0$, cette formule devait donner l'équation de la corde dans sa position initiale. Cette position était arbitraire : une fonction arbitraire pouvait donc être représentée par une série trigonométrique.

De là une longue discussion entre d'Alembert, Euler, D. Ber-

(¹) *Mémoires de l'Ac. de Berlin* (1747). — *Voir* aussi un Mémoire d'Euler, 1748.

(²) *Mémoires de l'Ac. de Berlin* (1753) : « ... Les calculs de MM. d'Alembert et Euler, qui renferment certainement tout ce que l'Analyse peut avoir de plus profond et de plus sublime..., montrent en même temps qu'une analyse abstraite, qu'on écoute sans aucun examen synthétique de la question proposée, est sujette à nous surprendre plutôt qu'à nous éclairer ... (p. 148). »

noulli [1] et plus tard Lagrange. Elle ne pouvait aboutir, à cause des idées trop étroites que l'on avait sur la nature des fonctions. On les *voyait* définies géométriquement par des arcs continus de courbes; si l'on en considérait d'autres, s'interrompant brusquement en un point et continuées par de nouveaux arcs, on les regardait comme représentant non pas une fonction proprement dite, mais des parties de fonctions distinctes. Dès lors, on ne pouvait imaginer qu'un développement analytique unique fût capable de représenter ce qui apparaissait comme l'ensemble de fonctions différentes; qu'une série trigonométrique, transcendante périodique, servît à exprimer une fonction non périodique.

Jetée dans un milieu si mal préparé, l'assertion de Fourier devait provoquer un grand étonnement. Dans son Mémoire si hardi, il énonçait le théorème général rappelé au début et en déduisait ce corollaire : *Un développement unique peut dans un intervalle représenter diverses fonctions.*

Ainsi, soient n fonctions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., chacune continues dans un intervalle $(\alpha\lambda)$, et une fonction $f(x)$ égale respectivement à $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., dans les intervalles $(\alpha\beta)$, $(\beta\gamma)$, ..., $(\alpha < \beta < \gamma \ldots)$: une seule série trigonométrique représentera, dans l'intervalle $(\alpha\lambda)$, la fonction discontinue $f(x)$ et, par suite, les fonctions distinctes $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ...

De plus, Euler (1777) et Fourier (1807) [2] montrent que les coefficients a_n, b_n de la série σ sont calculables au moyen d'intégrales qui conservent un sens, même quand la fonction est discontinue.

Admettons la possibilité de la représentation d'une fonction

---

[1] D'Alembert, Euler, Lagrange s'accordaient à ne pas regarder la solution de Bernoulli comme la plus générale. Une des raisons données par Euler, dans sa réponse à Bernoulli, c'est qu'une fonction arbitraire ne peut être représentée par une série trigonométrique. « *Concevons qu'on ait donné à la corde, avant que de la relâcher, une figure qui n'est pas comprise dans l'équation*

$$y = \alpha \sin \frac{\pi x}{a} + \beta \sin \frac{2\pi x}{a} + \ldots \text{ »}$$

(*Mémoires de l'Ac. de Berlin*, 1753, p. 199).

[2] EULER, *Nova Acta Acad. Sci. Petrop.*, t. XI, p. 94; 1798. — FOURIER, *Œuvres*, t. I, p. 208. On appelle *séries de Fourier* les séries trigonométriques dont les coefficients sont exprimés par les intégrales ci-contre.

donnée $f(x)$ par une série uniformément convergente, du type (1). — Ramenons l'intervalle ($\alpha\lambda$) à l'intervalle ($-\pi$, π), en posant

$$\xi = \frac{(\lambda - \alpha)x + (\lambda + \alpha)\pi}{2\pi},$$

ξ étant la variable dans l'intervalle ($\alpha\lambda$), et x la variable nouvelle. Si l'on multiplie les deux membres de l'égalité (1) successivement par $\cos px$ et $\sin px$, et si l'on intégre la série entre les limites $-\pi$ et π (p. 125), il vient

$$a_p = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos px\,dx, \qquad b_p = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin px\,dx,$$

car, des trois intégrales

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos px\,dx, \quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin px\,dx, \quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos px\,dx,$$

les deux premières sont égales à 0 pour $n \gtrless p$, à π pour $n = p$; et la dernière est toujours nulle.

84. Il restait à traiter le problème fondamental laissé inachevé par Fourier, *celui de la convergence des développements et de leur convergence uniforme* [1]. Ce fut l'œuvre de Dirichlet (1829) : il prouva leur convergence dans le cas où les conditions suivantes (qui ont gardé le nom de *conditions de Dirichlet*) sont satisfaites [2] :

1° *La fonction à développer est finie et uniforme;*

2° *Elle n'a pas un nombre infini de discontinuités; et aux points de discontinuité elle converge vers la moyenne des deux valeurs limites de la fonction prises de part et d'autre de ce point;*

---

[1] Comme nous ne parlons dans cet Ouvrage qu'incidemment des fonctions non analytiques, nous ne démontrerons pas les théorèmes que nous énoncerons. — *Cf.* PICARD, *Analyse*, t. I, Chap. IX.

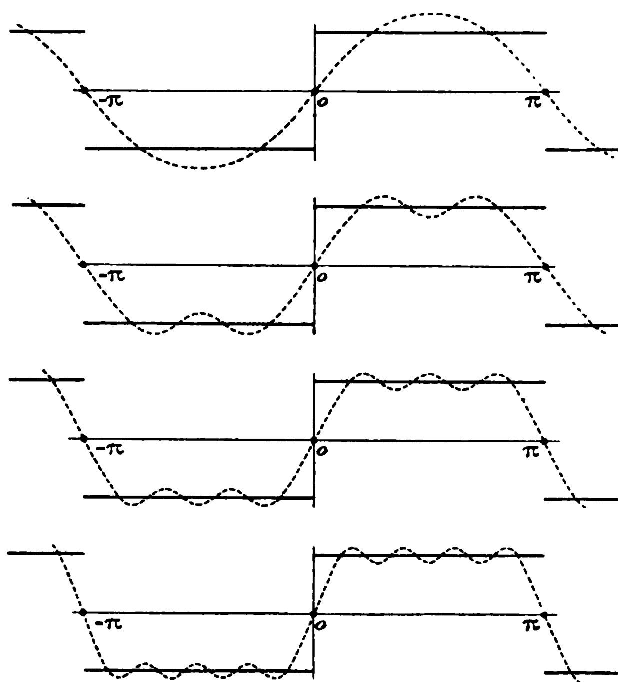
[2] LEJEUNE-DIRICHLET, *Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données* (*J. de Crelle*, t. 4, p. 157). Ce fut à cette occasion que Dirichlet commença à s'occuper des séries absolument convergentes; car la convergence des séries de Fourier est due en général aux *variations de signes* que présentent les termes.

3° *Elle n'a pas un nombre infini de maxima et de minima* (¹).

Ainsi, soit à développer en série de Fourier la fonction égale à $\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \ldots$ suivant que x est compris entre o et π, π et 2π, 2π et 3π, ..., et égale à zéro pour les valeurs de séparation $(0, \pi, 2\pi, \ldots)$.

Cette fonction satisfait aux conditions de Dirichlet; en calcu-

Fig. 19.



lant les coefficients de son développement par les formules données plus haut, on a pour son expression

$$\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots.$$

Les figures ci-dessus représentent la fonction elle-même (elle est indiquée par un gros trait) et celles que l'on obtient en prenant

(¹) Par exemple, la fonction continue $x \sin \frac{1}{x}$ a une infinité de maxima et de minima dans le voisinage de $x = 0$.

dans la série de Fourier correspondante un, deux, trois ou quatre termes (elles sont tracées en pointillé) (¹).

Ces *conditions de Dirichlet* étaient larges et se trouvaient vérifiées pour les fonctions que l'on rencontre habituellement en Physique mathématique : on avait donc là un précieux secours pour les applications. Mais les séries trigonométriques pouvaient être utilisées dans d'autres branches, par exemple dans la Théorie des nombres. En toute hypothèse, c'était résoudre une question intimement liée à celle de la nature des fonctions, que d'élucider les cas laissés de côté par le grand géomètre.

Riemann se livra à cet examen. Les coefficients des séries de Fourier étant représentés par des intégrales, il commença par approfondir la notion d'intégrale définie, ce qui le conduisit à la distinction entre les fonctions intégrables et non intégrables (n° **161**); il revint sur la question de la continuité, et donna des exemples de fonctions qui, dans un intervalle aussi petit que l'on veut, sont discontinues un nombre infini de fois (p. 38). Mais pour avancer dans la solution il dut modifier la manière de poser le problème, et il se préoccupa de la recherche des conditions nécessaires pour la convergence.

Ces conditions nécessaires n'ont pas encore été trouvées; mais on a étendu les conditions suffisantes de Dirichlet en montrant que dans certains cas la série converge, alors même que la fonction a une infinité de maxima (²), ou devient infinie (³).

(¹) Cet exemple et des exemples analogues se trouvent dans BYERLY, *An elementary treatise on Fourier's series, etc.* (Boston, 1893).

(²) LIPSCHITZ, *De explicatione, per series trigonometricas instituenda, functionum unius variabilis arbitrarium, et præcipue earum quæ per variabilis spatium finitum valorum maximorum et minimorum numerum habent infinitum, disquisitio* (*J. de Crelle*, t. 63, p. 296). Il s'occupe donc spécialement du cas, à peu près laissé de côté par Dirichlet, où dans l'intervalle $(-\pi, +\pi)$ la fonction, tout en satisfaisant aux autres conditions de Dirichlet, a un nombre infini de maxima. Une condition suffisante pour que la série de Fourier relative à une pareille fonction $\varphi(x)$ converge peut être traduite par l'inégalité

$$|\varphi(x+\delta)-\varphi(x)| < k\delta^a,$$

où k est une constante fixe, a un exposant positif, δ un nombre suffisamment petit et x l'une quelconque des valeurs dans le voisinage de laquelle la fonction φ a une infinité de maxima et de minima (*voir* le Mémoire, p. 308). Du reste, le rôle du théorème de M. Lipschitz est plus vaste (*cf.* MITTAG-LEFFLER, *A. M.*, t. XXIV, p. 230).

(³) *Cf.* aussi JORDAN, *Sur la série de Fourier* (*C. R.*, 1881, 1er semestre.

Quant à l'uniformité de la convergence, elle ne peut exister dans une région comprenant un point de discontinuité (p. 124); dans tout autre intervalle, les séries de Fourier convergent uniformément [1].

Enfin, en s'appuyant sur une proposition de Riemann, M. Cantor a prouvé que *deux séries trigonométriques qui, dans un intervalle d'amplitude* 2π, *convergent et ont même somme ont aussi mêmes coefficients* [2]. Cette propriété subsiste, si l'on renonce soit à la convergence, soit à l'égalité des sommes, pour un nombre fini de valeurs de x, ou même une infinité de valeurs [3]. Ainsi, dans ces conditions, une fonction ne peut être développée, dans un intervalle d'amplitude 2π, que d'*une seule manière* en série trigonométrique : de là une analogie avec les développements en série entière [4].

---

p. 228). — DU BOIS-REYMOND, *Sur les formules de représentation des fonctions* (*C. R.*, 1881, 1er semestre, p. 915 et 962). — BONNET, *B. D.*, 1879, p. 343 et 480. — HARNACK, *B. D.*, 1882, p. 242. — SCHWARZ, *J. de Crelle*, t. 74, p. 228. — DINI, *Serie di Fourier* (Pisa, 1880). — WEIERSTRASS, *Sur la possibilité d'une représentation analytique des fonctions dites arbitraires d'une variable réelle* (traduction Laugel, *J. M.*, 1886).

(1) Cauchy a essayé de donner une méthode générale pour représenter des fonctions d'une ou plusieurs variables par des séries dont les termes soient des fonctions de même espèce (*Œuvres*, 2e série, t. VII, p. 366) : il l'a appliquée aux développements en séries d'exponentielles, de sinus, de cosinus, etc. (t. VII, p. 393). — *Cf.* aussi PICARD, *Analyse*, t. II, p. 167.

(2) *Cf.* CANTOR, *J. de Crelle*, t. 72, p. 139. — PICARD, *Analyse*, 2e édit., t. I, p. 265. — HARNACK, *B. D.*, 1882, p. 265.

(3) *Cf.* CANTOR, *J. de Crelle*, t. 73, p. 294; *A. M.*, t. II, p. 336. — D'une manière précise, on peut exclure de l'intervalle des points formant *un ensemble de première espèce d'ordre n*, c'est-à-dire un ensemble dont le dérivé d'ordre n se réduit à un nombre limité de points (*voir* p. 22).

(4) La série

$$2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \ldots\right)$$

est la seule série trigonométrique qui représente x dans l'intervalle $(-\pi, \pi)$; *dans une partie* de cet intervalle, x a *une infinité* de représentations. Ainsi des séries

$$\frac{2}{\pi}\left(\sin x - \frac{1}{3^2}\sin 3x + \frac{1}{5^2}\sin 5x - \ldots\right),$$
$$\frac{2}{\pi}\left(\sin\alpha \sin x + \frac{1}{3^2}\sin 3\alpha \sin 3x + \frac{1}{5^2}\sin 5\alpha \sin 5x + \ldots\right),$$

la première définit une fonction égale à x dans l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, et à 0 dans les intervalles $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$; la seconde, une fonction égale à x (de 0 à α), à α (de α à $\pi - \alpha$), à $\pi - x$ (de $\pi - \alpha$ à π).

Plus tard, les séries trigonométriques se présenteront dans les applications du théorème de Laurent, les développements d'après Jacobi des fonctions elliptiques, etc. Mais là leur convergence résultera des principes généraux relatifs aux séries de variables complexes : on n'aura pas à invoquer les théorèmes sur le développement des fonctions arbitraires de variables réelles.

§ V. — Séries divergentes.

85. Les séries divergentes, par leur nature même, ne représentent pas de grandeur définie. Est-il néanmoins impossible de les utiliser pour l'introduction de fonctions bien déterminées et de leur faire jouer un rôle dans les recherches analytiques?

Grâce à elles, d'illustres géomètres, par exemple Euler, obtinrent d'importants résultats [1].

1° Lorsqu'une *série numérique* oscillante se présentait d'elle-même dans les calculs (et n'avait pas été construite artificiellement), une *moyenne* de sommes successives de termes était regardée comme la valeur de la série;

2° Lorsqu'une fonction réelle continue $f(x)$ était représentée dans un intervalle (ab), b exclus, par une série convergente $s(x)$, cette série était employée pour calculer la fonction *en b et au delà de b*.

Ce procédé manquait évidemment de rigueur. Même quand la

---

(1) Parmi les anciens géomètres *hostiles* à l'emploi des séries divergentes, on peut citer Varignon, N. Bernoulli, d'Alembert. « Les raisonnements fondés sur les séries qui ne sont pas convergentes... me paraîtront très suspects, même quand les résultats s'accorderaient avec des vérités connues d'ailleurs » (d'Alembert, *Opusc. math.*, t. V, S.; 1768).

De fait, les raisons alléguées n'étaient guère concluantes. Par exemple, Leibniz écrit à Christian Wolfius : « *Quæris a me, vir celeberrime, quid de quæstione sentiam utrum* $1-1+1-1+\ldots$ *in infinitum sit* $\frac{1}{2}$*?... Cum series est infinita, ... evanescente natura numeri, evanescit etiam paris aut imparis assignibilitas; et cum ratio nulla sit pro paritate magis aut imparitate adeoque pro prodeunte* 0 *magis quam* 1, *fit admirabili naturæ ingenio ut transitu a finito ad infinitum simul fiat transitus a disjunctivo* (*jam cessante*) *ad unum* (*quod superest*) *positivum, inter disjunctiva medium.... Hoc argumentandi genus, etsi metaphysicum magis quam mathematicum videatur, tamen firmum est...* » (*Acta Erud. Lipsiæ*, Suppl., t. V, p. 269; 1713).

La proposition de M. Frobenius énoncée plus loin justifie la méthode des moyennes employée par Leibniz et Euler.

série $s(x)$ est convergente en b on ignore si en ce point elle représente encore la fonction $f(x)$ (p. 124 et 135). *A fortiori* que peut-on affirmer de cette série dans les régions où elle diverge et *des séries à termes variables toujours divergentes?* Aussi est-ce à bon droit que Gauss, Abel et Cauchy en firent abandonner l'emploi ([1]).

Cauchy et Abel se proposaient néanmoins de rechercher pourquoi, *en fait,* ces séries avaient conduit à des résultats exacts ([2]). Ne pouvait-on reprendre leur étude sur de nouvelles bases, et les utiliser, en toute rigueur cette fois, dans la théorie des fonctions?

([1]) Au début, Cauchy s'en excuse presque : « J'ai cru devoir rejeter les développements de fonctions en séries infinies, toutes les fois que les séries obtenues ne sont pas convergentes... Malgré tout le respect que commande une si grande autorité (celle de Lagrange), la plupart des géomètres s'accordent maintenant à reconnaître l'incertitude des résultats auxquels on peut être conduit par l'emploi des séries divergentes... » (*Résumé des leçons données à l'École Polytechnique.* Avertissement. *Œuvres,* 2ᵉ série, t. IV).

« Quant aux méthodes, j'ai cherché à leur donner toute la rigueur qu'on exige en Géométrie, de manière à ne jamais recourir aux raisons tirées de la généralité de l'Algèbre. Les raisons de cette espèce, quoique assez communément admises, surtout dans le passage des séries convergentes aux séries divergentes..., ne peuvent être considérées, ce me semble, que comme des inductions propres à faire pressentir quelquefois la vérité, mais qui s'accordent peu avec l'exactitude si vantée des sciences mathématiques... (CAUCHY, *Analyse algébrique.* Préface. *Œuvres,* 2ᵉ série, t. III, p. II).

« Les séries divergentes sont, en général, quelque chose de bien fatal, et c'est une honte qu'on ose y fonder une démonstration. On peut démontrer tout ce que l'on veut en les employant, et ce sont elles qui ont fait tant de malheurs et enfanté tant de paradoxes. Peut-on imaginer rien de plus horrible que de débiter

$$0 = 1 - 2^n + 3^n - 4^n + \ldots ?$$

» ... Enfin mes yeux se sont dessillés d'une manière bien frappante, car, à l'exception des cas les plus simples, il ne se trouve dans les Mathématiques presque aucune série infinie dont la somme soit déterminée d'une manière rigoureuse, c'est-à-dire que la partie la plus essentielle des Mathématiques est sans fondement... » (Lettre d'Abel à Holmboe, 1826. *Œuvres,* t. II, p. 256).

([2]) « Pour la plus grande partie, les résultats sont justes, il est vrai, mais c'est là une chose bien étrange : je m'occupe à en chercher la raison » (ABEL, *loc. cit.*).

Cauchy revint sur la question, soit en s'occupant du problème connexe relatif aux intégrales définies dépourvues de sens, soit dans des études directes, par exemple à propos de la série de Stirling (*Œuvres,* 1ʳᵉ série, t. VIII, p. 18. — *C. R.*, 1843).

« ... Le paradoxe disparaît si l'on songe à la différence profonde entre les séries *naturelles*, auxquelles conduisent les problèmes simples, et les séries *fabriquées artificiellement* » (BOREL, *A. E. N.*, 1899, p. 51).

86. Voici l'énoncé du problème :

A une série divergente donnée, on propose de faire correspondre une expression analytique telle que la substitution de cette expression à la série conduise, en sauvegardant le principe de la permanence des formes opératoires (¹), *à des résultats rigoureusement ou approximativement exacts.*

Des tentatives ont été faites dans diverses directions.

A des fonctions qu'il s'agit d'étudier pour des valeurs très grandes de la variable (²), M. Poincaré fait correspondre des séries divergentes telles que la somme de leurs n premiers termes donne la valeur de la fonction, pour ces valeurs de la variable,

---

(¹) On utilise fréquemment ce principe (HANKEL, *Vorlesungen über complexe Zahlen*) : par exemple on l'a appliqué en inventant les racines imaginaires. Ici l'on cherchera des expressions pouvant être traitées comme des séries convergentes, au point de vue de la multiplication, de l'intégration, de la dérivation; une série uniformément sommable de fonctions continues (ou holomorphes) devra être continue (ou holomorphe), etc.

Cf. BOREL, *Leçons sur les séries divergentes.* Ses travaux (*J. M.*, 1896; *A. E. N.*, 1899; *C. R.*, 1895 à 1900) y sont développés et complétés. — *Voir* aussi SERVANT, *A. T.*, 1899, et surtout LE ROY, *A. T.*, 1900.

Les recherches sur les séries divergentes sont naturellement reliées aux problèmes de prolongement analytique ou *non analytique;* aussi la lecture du Chapitre V doit-elle accompagner celle de ce paragraphe.

(²) Soit $f(x)$ une pareille fonction, et $s_n(x)$ la somme des $n+1$ premiers termes d'une série divergente s du type $a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots$, dont les éléments, si x est très grand, diminuent d'abord rapidement pour croître ensuite au delà de toute limite. Supposons qu'il soit possible de déterminer les coefficients a de telle sorte que l'on ait, pour x infini,

$$|x^n[f(x) - s_n(x)]| < \varepsilon,$$

ε étant un nombre très petit donné à l'avance.

L'erreur commise en substituant $s_n(x)$ à $f(x)$ n'atteint pas εx^{-n}; pour les valeurs considérées, elle est donc très petite : la somme $s_n(x)$ des $n+1$ premiers termes de la série asymptotique s représente asymptotiquement la fonction.

Les coefficients a de ces séries sont définis par les égalités

$$a_i = \lim_{x=\infty} x^i \left[f(x) - a_0 - \frac{a_1}{x} - \ldots - \frac{a_{i-1}}{x^{i-1}}\right] \qquad (i = 0, 1, \ldots).$$

On peut opérer sur ces séries comme sur des séries convergentes lorsqu'il s'agit de les multiplier et, par suite, de les élever à des puissances entières, de les substituer dans des séries entières convergentes, de les intégrer terme par terme (il n'est pas permis de les différentier). Ainsi, le produit de deux fonctions, représen-

avec telle approximation que l'on veut. On peut dire que de pareilles sommes représentent asymptotiquement la fonction : de là le nom de *séries asymptotiques* donné aux séries qui les fournissent.

Stieltjes ([1]) et M. Padé ([2]) utilisent les *fractions continues*. A une série divergente on peut faire correspondre une fraction continue convergente dont la somme définit une fonction analytique : c'est cette fonction que l'on substitue à la série.

Les fractions continues sont, dans les calculs, d'un maniement

---

tées chacune par une série asymptotique, est représenté par la série asymptotique produit des séries considérées.

Comme exemple, on peut citer la série de Stirling

$$\frac{1}{2}\log(2\pi)+\left(x+\frac{1}{2}\right)\log x - x + \frac{B_1}{1.2}\frac{1}{x} - \frac{B_2}{3.4}\frac{1}{x^3} + \frac{B_3}{5.6}\frac{1}{x^5} - \ldots,$$

où les coefficients B désignent les nombres de Bernoulli. Cette série, toujours divergente, représente asymptotiquement $\log\Gamma(x+1)$, et par suite, si l'on s'arrête au plus petit terme, peut servir à calculer la fonction eulérienne pour des valeurs de x très grandes, avec une approximation qui croît avec x (*cf.* Poincaré, *A. M.*, t. VIII, p. 295; *Méthodes de la Mécanique céleste,* t. II, p. 2).

En même temps que M. Poincaré, Stieltjes s'est occupé des séries asymptotiques sous le nom de séries *semi-convergentes* (*Thèse, A. E. N.,* 1886).

Les séries asymptotiques (divergentes) rentrent dans celles que les astronomes regardent comme convergentes. C'est que les astronomes et les géomètres prennent les mots dans des sens différents : les premiers envisagent les applications, les autres des définitions rigoureuses. Par exemple, soient les séries ayant pour terme général

$$\frac{1000^n}{n!} \quad \text{et} \quad \frac{n!}{1000^n}.$$

Pour les géomètres, la première converge, la seconde diverge. Pour les astronomes, la première diverge parce que ses mille premiers termes vont en croissant; la seconde converge, parce que ses mille premiers termes décroissent, et décroissent d'abord rapidement (Poincaré, *loc. cit.*).

([1]) *Cf.* Stieltjes, *A. T.,* 1894 et 1895.

([2]) Voici le point de départ de M. Padé (*Thèse, A. E. N.*, 1892. S.; *A. M.*, t. XVIII, p. 97): 1° Laguerre a établi qu'à une série entière divergente peut correspondre une fraction continue simple convergente (n° 93). Réciproquement, Halphen a montré qu'une fraction continue simple pouvait diverger, alors que la série correspondante était convergente. 2° D'une série entière se déduisent une infinité de fractions continues telles que, réciproquement, chaque fraction continue détermine complètement l'ensemble des fractions restantes et les coefficients de la série primitive. Si, parmi ces fractions continues, il y en a qui convergent en même temps que la série entière, leur limite coïncide avec la somme de la série. *S'il y en a qui convergent en des points où la série diverge, elles peuvent définir en ces points la somme de la série divergente.*

incommode : aussi Stieltjes, sans s'y arrêter, ne les prend que comme un intermédiaire le conduisant à des intégrales définies, qui finalement remplacent la série divergente.

Ce sont aussi des *intégrales définies* qu'introduit M. Le Roy.

Ici, disons un mot des recherches de M. Borel : elles ont pour point de départ la généralisation des notions de limite et de somme.

87. Considérons une suite infinie *divergente* u_0, u_1, ..., u_n, ... de grandeurs réelles : elle n'a pas de limite. Pour arriver à lui en assigner une, étudions la limite d'une *moyenne* entre les valeurs des éléments de la suite, c'est-à-dire une expression de la forme

$$(1) \qquad \frac{c_0 u_0 + c_1 u_1 + \ldots + c_n u_n + \ldots}{c_0 + c_1 + \ldots + c_n + \ldots},$$

les coefficients c désignant des nombres réels non négatifs convenablement choisis.

On les déterminera de façon à avoir au numérateur et au dénominateur de la fraction (1) des séries convergentes ; sinon on serait ramené à un problème analogue à celui que l'on veut traiter.

Du reste, dans les cas où il y a intérêt à généraliser la notion de limite, les nombres $|u_n|$ augmentent rapidement avec n : on choisira donc des nombres c_n à décroissance rapide.

Prenons $c_n = \frac{a^n}{n!}$, ce qui donne pour dénominateur de la fraction (1) une fonction entière e^a. Supposons que le numérateur

$$u(a) = u_0 + u_1 a + \ldots + u_n \frac{a^n}{n!} + \ldots$$

converge aussi pour toute valeur de a : cette série $u(a)$ s'appellera *fonction entière associée* à la suite (u).

Dans ces conditions, si l'expression $e^{-a} u(a)$ a une limite pour a infini, cette limite sera par définition *la limite généralisée de la suite* (u).

Regardons les éléments u comme les termes d'une série, ce qui revient à considérer la suite

$$s_0, \quad s_1, \quad \ldots, \quad s_n, \quad \ldots \quad (s_n = u_0 + \ldots + u_n).$$

La série (u) était convergente, lorsque la suite (s) avait une limite s, et cette limite représentait la somme de la série. On dira que la série (u) est *sommable* quand la suite (s) aura une *limite généralisée* s_g, et cette limite

$$s_g = \lim_{a=\infty}\left[e^{-a}\left(s_0 + s_1\frac{a}{1} + \ldots + s_n\frac{a^n}{n!} + \ldots\right)\right] = \lim_{a=\infty}[e^{-a}s(a)]$$

sera la *somme généralisée* de la série sommable.

Avant de justifier cette définition [1], en montrant l'intérêt des séries sommables, faisons quelques remarques sur les limites généralisées.

88. 1° Si à partir d'un certain rang les termes d'une suite (u) sont nuls, la fonction entière associée $u(a)$ se réduit à un polynome; dès lors la suite a une limite généralisée nulle.

Si deux suites ont pour limites généralisées respectives deux nombres l et l', la suite formée en ajoutant terme à terme les éléments des deux suites a pour limite généralisée $l + l'$.

De la juxtaposition de ces remarques on conclut que la limite généralisée d'une suite n'est pas altérée, lorsqu'on change la valeur d'un nombre limité de termes de la suite, et en particulier quand on les remplace par zéro.

2° Une suite de termes (s), qui a une limite, a aussi une limite généralisée, et les valeurs des deux limites sont les mêmes.

La première partie se démontre aisément. Pour établir la seconde, on prouve que plus généralement, si les sommes s_n sont comprises, à partir d'un certain rang, entre deux nombres p et q, la limite généralisée, si elle existe, est comprise entre p et q.

---

[1] Soit une série entière à termes réels divergente au point 1. M. Frobenius considérait, comme M. Cesàro (p. 130), la *moyenne*

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_n}{n+1} \qquad \left(s_n = \sum_0^n a_n x^n\right);$$

il justifiait cette introduction en montrant que si, au point 1, σ_n a une limite σ, la série est convergente, c'est-à-dire a une somme $f(x)$, dans l'intervalle $(-1, +1)$ (limites exclues), et *cette limite σ est la limite vers laquelle tend $f(x)$, quand x tend vers* 1 (*J. de Crelle*, t. 89, p. 262).

C'est cette extension de la définition de somme d'une série, déjà élargie par M. Hölder (*M. A.*, t. XX, p. 535), que M. Borel généralise.

Soit, pour fixer les idées, $q > p > 0$. Lorsqu'on remplace par p tous les termes de la suite (s), la limite généralisée, si elle existe, ne peut augmenter; du reste, par cette substitution elle devient égale à p. La limite généralisée n'est donc pas inférieure à p, et n'est pas supérieure à q : dès lors, elle est comprise entre p et q.

On en déduit que *la somme d'une série convergente, et la somme généralisée de cette série,* envisagée comme série sommable, *sont les mêmes.*

89. La somme généralisée s_g d'une série (u) peut être mise sous forme d'intégrale. En effet, on a d'abord

$$\frac{d}{da}[e^{-a}s(a)] = e^{-a}[s'(a) - s(a)] = e^{-a}u_1(a),$$

en posant

$$u_1(a) = s'(a) - s(a) = u_1 + \frac{a}{1}u_2 + \ldots + \frac{a^n}{n!}u_{n+1} + \ldots.$$

On en déduit

$$[e^{-a}s(a)]_{a=0}^{\infty} = \int_0^{\infty} e^{-a}u_1(a)\,da = s_g - u_0,$$

car

$$[e^{-a}s(a)]_{a=0} = u_0.$$

Intégrons par parties; il vient :

$$s_g - u_0 = \left[e^{-a}\int_0^a u_1(a)\,da\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-a}\left[\int_0^a u_1(a)\,da\right]da.$$

La partie intégrée est nulle; u_0 peut être remplacé par $\int_0^{\infty} u_0 e^{-a}da$; $u_0 + \int_0^a u_1(a)\,da$ n'est autre que $u(a)$: d'où la formule

$$s_g = \int_0^{\infty} e^{-a}u(a)\,da,$$

on la regarde comme la définition pratique de la somme généralisée de la suite (u) (¹).

(¹) M. Le Roy donne une autre définition de la *série divergente sommable* (celle de M. Borel en est un cas particulier) : elle revient à faire correspondre à une série une intégrale définie plus maniable qui en représente la somme (*A. T.*, 1900, p. 331 et 416).

Ainsi, en supposant que les opérations précédentes aient un sens, c'est-à-dire que la série $u(a)$ soit une fonction entière, dite *fonction entière associée* à la suite (u), l'intégrale ci-dessus sera l'*intégrale associée* à cette suite pour en définir la somme généralisée.

Quand cette intégrale non seulement converge, mais converge absolument, on dit que la série (u) est *absolument sommable :* on s'occupe uniquement des séries absolument sommables ([1]).

90. *La série obtenue en supprimant le premier terme u_0 d'une série absolument sommable reste absolument sommable; les sommes généralisées des deux séries diffèrent de u_0.*

En effet, la série entière associée à la nouvelle série sera

$$u_1 + u_2 \frac{a}{1} + \ldots + \frac{u_{n+1}}{n!} a^n + \ldots.$$

C'est la dérivée de la fonction entière $u(a)$ associée à la série (u); par suite cette série représente une fonction entière, et les autres conditions de sommabilité absolues sont satisfaites ([2]).

Désignons par σ_g la somme généralisée de la série obtenue en supprimant le terme u_0. On a

$$\sigma_g = \int_0^\infty e^{-a} u'(a)\, da.$$

L'intégration par parties transforme σ_g en $s_g - u_0$.

([1]) M. Borel entend même par *serie absolument sommable* celle pour laquelle les intégrales définies

$$\int_0^\infty e^{-a} \left| \frac{d^\lambda u(a)}{da^\lambda} \right| da \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots)$$

ont *toutes* un sens (*C. R.*, 1900, 2e semestre, p. 830).

La définition d'*intégrale associée* peut être étendue au cas où la série $u(a)$ a seulement un rayon de convergence *fini* (et $\gtrless 0$), pourvu que la fonction analytique correspondante puisse être prolongée analytiquement le long de l'axe réel et n'ait pas de point singulier sur cet axe (Borel, *Séries divergentes*, p. 99).

([2]) La réciproque est vraie; par suite les séries

$$u_0 + u_1 + \ldots, \quad u_1 + u_2 + \ldots$$

sont absolument sommables en même temps (Borel, *Séries divergentes*, p. 101).

Répétons cette opération, et enlevons à la série initiale (u), ses 2, 3, ..., n premiers termes. La série obtenue

$$u_n + u_{n+1} + \ldots$$

reste absolument sommable et a pour somme

$$s_g - (u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}).$$

Pour étendre ces définitions aux séries à termes complexes, il suffit de considérer la partie réelle et la partie imaginaire.

91. *Sommabilité uniforme.* — Soit une suite (s) d'éléments dépendant d'une variable complexe z : supposons que dans un domaine $\mathfrak{D}$ ils soient holomorphes et aient une limite généralisée. On dit que la suite (s) *tend uniformément dans* $\mathfrak{D}$ *vers sa limite généralisée,* lorsque pour toute valeur de a la série

$$e^{-a}\left(s_0 + a\,s_1 + \ldots + \frac{a^n}{n!}\,s_n + \ldots\right) = e^{-a}\,s(a, z)$$

converge uniformément dans $\mathfrak{D}$ relativement à z, et tend uniformément vers sa limite $s_g(z)$ pour a infini. Dans ce cas, on peut faire correspondre à tout nombre positif ε un nombre a_0, tel que l'on ait, dans tout le domaine,

$$|e^{-a}s(a, z) - s_g(z)| < \varepsilon. \qquad (a \text{ quelconque} > a_0).$$

Si la suite (s) tend uniformément dans $\mathfrak{D}$ vers une limite généralisée, on dira que la série (u) est *uniformément sommable dans* $\mathfrak{D}$.

Cela posé, supposons que la suite (s) tende uniformément dans $\mathfrak{D}$ vers une limite généralisée; la série

$$\sum_{n=0}^{\infty}[e^{-(n+1)}s(n+1, z) - e^{-n}s(n, z)] = s_g(z) - u_0,$$

qui dans ce domaine a ses éléments holomorphes et converge uniformément, a une somme holomorphe [1].

---

[1] Une série uniformément convergente dont les éléments sont holomorphes est holomorphe (n° 233); c'est ce théorème que l'on invoque et que l'on étend aux sommes généralisées.

Par suite, *si dans un domaine une série a ses éléments holomorphes et est uniformément sommable, sa somme généralisée est holomorphe dans le même domaine.*

92. Cette proposition justifie l'introduction des sommes généralisées, au moins pour les séries *entières prolongeables* [1].

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe définie dans un domaine $\mathfrak{D}$ d'un seul tenant, et représentée dans une portion δ de $\mathfrak{D}$ par une série $s(z)$, uniformément convergente dans δ et ayant ses éléments homolorphes dans $\mathfrak{D}$. Imaginons que cette série soit uniformément sommable dans $\mathfrak{D}$ et appelons $s_g(z)$ sa somme généralisée dans ce domaine.

La somme $s_g(z)$ représente $f(z)$ dans tout le domaine $\mathfrak{D}$.

En effet, ces deux fonctions holomorphes dans le domaine $\mathfrak{D}$ d'un seul tenant, coïncident, dans une région δ, avec la fonction $s(z)$; dès lors elles sont identiques dans tout le domaine $\mathfrak{D}$ [2].

La somme $s_g(z)$ permet de prolonger analytiquement la fonction représentée dans δ par $s(z)$. Ainsi ces deux problèmes, *prolongement analytique, sommation des séries divergentes,* peuvent avoir la même solution. Mais ce cas est le moins intéressant, puisqu'alors le résultat obtenu serait fourni par d'autres méthodes [3] : en eux-mêmes les problèmes sont distincts.

---

(1) Le sens à donner à une pareille série, aux points où elle diverge, résulte de la notion du prolongement analytique : à ce point de vue, toute méthode de prolongement résout incidemment le problème des séries divergentes.

Si la fonction analytique, définie par une série entière *prolongeable,* est *multiforme,* il est naturel de prendre comme valeur de la série en un point de divergence *chacune* des valeurs de la fonction analytique. On est ainsi conduit à attribuer en un point, aux séries divergentes comme aux intégrales définies prises le long de contour, plusieurs valeurs et même une infinité, par suite à introduire la notion de *période* pour les séries comme pour les intégrales, à faire des *coupures* qui rendent la série uniforme, etc.

Le *domaine de sommabilité* d'une série entière prolongeable rendue uniforme par des coupures est limité par les côtés d'un polygone dit *polygone de sommabilité* (n° 190).

(2) Nous nous appuyons sur un théorème qui sera démontré aux n°s 228 et 136.

(3) Ce cas est aussi en un sens le moins facile, car, si une série entière $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence fini, la méthode de M. Borel, en ramenant le problème

En effet, une série entière, dont le rayon de convergence est nul, peut être absolument sommable, bien qu'elle ne définisse pas de fonction analytique ([1]). Inversement, le prolongement analytique peut être possible, sans que la série servant d'élément initial soit absolument sommable.

FRACTIONS CONTINUES.

93. Que l'on envisage les séries au point de vue de l'approximation des fonctions ou qu'on y cherche un élément analytique servant à leur représentation et à l'étude de leurs propriétés, il serait naturel de les rapprocher des *fractions continues*.

Elles se divisent en deux catégories, suivant que leurs éléments sont constants ou variables ([2]) : ces dernières s'appellent *fractions continues algébriques*. Leur théorie conduit à un algorithme permettant de former de proche en proche toutes les *réduites*, c'est-à-dire les fractions rationnelles obtenues en limitant la suite à un quotient incomplet déterminé.

La série entière mettait en évidence une suite de polynomes s'approchant de plus en plus de la fonction qu'elle définit : la fraction

---

à l'étude de la fonction entière associée $\sum \frac{\alpha_n z^n}{n!}$, a pour résultat : « ... de dilater le cercle de convergence jusqu'à l'infini. Mais cela ne constitue qu'un déplacement de difficulté. ... En réalité, on a balayé toutes les singularités, ... et on les a condensées à l'infini : il faut ensuite faire une étude aussi difficile que celle du prolongement de la fonction donnée, celle de la fonction entière associée aux environs de son point essentiel à l'infini. » (LE ROY, *A. T.*, 1900, p. 409.)

La méthode apporte au contraire quelque chose de nouveau, si le rayon de convergence est nul : alors, en effet, la fonction associée a dans des cas étendus un rayon de convergence *fini*.

([1]) On a pu ainsi étudier des équations différentielles algébriques auxquelles des séries de Taylor, à rayon de convergence nul, satisfont formellement (n° 190).

([2]) Il faut se défier de fausses analogies entre les théories des fonctions continues arithmétiques et algébriques. « ... Je ne parle pas de l'étrange confusion qui y apparaît entre la théorie du développement d'un nombre irrationnel en fraction continue arithmétique, et celui d'une fonction en fraction continue algébrique. Le rapprochement que l'on fait toujours entre ces deux ordres de faits est aussi bizarre que le serait l'idée que la théorie des séries entières doit toujours et nécessairement être précédée de la théorie des fractions décimales. » (PADÉ, *A. M.*, t. XVIII, p. 108.)

continue introduit des quotients de polynomes. La propriété essentielle de la fraction continue arithmétique est de fournir, par ses réduites, des fractions plus approchées d'un nombre irrationnel donné que toute fraction de termes moindres. De même, *une réduite dont le numérateur et le dénominateur ont respectivement pour degrés p et q donne, pour une fonction développable en série entière, une représentation qui coïncide avec la série jusqu'au terme de degré $p+q$ inclusivement* (¹).

Jusqu'à Euler (²), les fractions continues n'avaient servi que dans la théorie des nombres : il les a appliquées à la représentation des fonctions. Depuis longtemps, on se servait des séries pour intégrer par approximation les équations différentielles : Lagrange (³) a établi que les intégrales de ces équations pouvaient être développées en fractions continues. Abel, Jacobi, Laguerre, Stieltjes, etc. ont appliqué la représentation des fonctions par des fractions continues à l'étude de leurs propriétés analytiques (⁴).

Ici, il suffira d'indiquer quelques références : nous n'avons pas à développer cette théorie, l'une des plus difficiles de l'Analyse, et qui était jusqu'à ces dernières années « une sorte de *terra incognita*... dont la carte était presque blanche » (⁵).

(¹) Ces résultats ont été précisés par M. Padé (*A. E. N.*, 1892. S.; *A. M.*, t. XVIII). Il insiste sur l'*indétermination* du problème de la réduction d'une fonction en fraction continue, ou sur la *multiplicité* des fractions continues de divers types relatifs à une même fonction. Les développements diffèrent suivant la loi d'après laquelle sont reliés les entiers p et q : ceux donnés par Euler, Jacobi, Halphen, Stieltjes, etc. correspondent à des hypothèses particulières. M. Padé s'occupe spécialement des fractions continues *simples* : ce sont celles qui ont pour numérateurs partiels des monomes en x, et pour dénominateurs des polynomes entiers en x dont le terme constant n'est pas nul.

Cf. aussi : BERTRAND, *Calcul différentiel et intégral*, t. I, p. 430. — JORDAN, *Analyse*, 2ᵉ édit., t. I, p. 368.

(²) EULER, *Introductio in analysim infinitorum*, t. I, Chap. XVIII (édit. de 1797).

(³) LAGRANGE, *Œuvres*, t. IV, p. 301.

(⁴) *Cf.* ABEL, *Œuvres*, t. I, p. 104. — JACOBI, *Œuvres*, t. I, p. 329. — RIEMANN, *Œuvres*, trad. Laugel, p. 369. — LAGUERRE, *S. M.*, 1879; *J. M.*, 1885, p. 135. — HALPHEN, *Fonctions elliptiques*, t. II, p. 575. — STIELTJES, *A. T.*, 1894 et 1896. — ROUCHÉ, *J. E. P.*, 37ᵉ Cahier (1858). — PADÉ, *A. E. N.*, 1899. — Etc.

(⁵) POINCARÉ, *Notice sur Halphen* (*J. E. P.*, 60ᵉ Cahier; 1890).

SECTION II.

TRANSCENDANTES ÉLÉMENTAIRES.

---

94. Dans cette catégorie, on range certaines fonctions analytiques simples, prises parmi celles qui ne sont pas racines d'équations algébriques, spécialement l'exponentielle.

Pour les définir, la voie la plus rapide, sinon la plus élémentaire, serait d'écrire les *équations différentielles* auxquelles elles satisfont.

En partant d'une *propriété fonctionnelle,* on mettrait en évidence le lien : 1° entre les trois types de fonctions analytiques uniformes admettant un théorème d'addition algébrique : fonctions *rationnelles, trigonométriques, elliptiques;* 2° entre les fonctions trigonométriques (simplement périodiques) et les fonctions elliptiques (doublement périodiques).

C'est ce que nous ferons plus tard : pour l'instant nous avons à prendre comme point de départ des *séries* ou des produits infinis.

Rappelons deux définitions :

1° *Une fonction admet un théorème d'addition algébrique* lorsque, entre trois valeurs de la fonction correspondant à trois valeurs de l'argument dont l'une est la somme des deux autres, il existe une relation algébrique à coefficients indépendants de ces arguments.

2° *Une fonction $f(z)$ est périodique,* de période ω, lorsque pour toute valeur de l'argument on a la relation

$$f(z+\omega)=f(z).$$

Si ω est période, il en est de même de $\mu\omega$, μ désignant un entier quelconque. La période est *primitive* lorsque, en la divisant par un entier, on n'obt'ent jamais de nouvelle période de la fonction.

Une fonction ayant une seule période primitive est *simplement périodique*.

§ VI. — L'EXPONENTIELLE ET LES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES.

95. Quand la variable est réelle, on définit e^z en supposant z entier et positif, entier et négatif, fractionnaire, irrationnel. *On démontre* ensuite l'égalité

$$(1) \qquad e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots.$$

C'est cette formule qui sert de *définition* à l'exponentielle lorsque z est une variable complexe.

La série (1) converge absolument et uniformément dans tout domaine fini. C'est donc une fonction continue; elle a une dérivée qui s'obtient en faisant la somme des dérivées de ses termes et a même valeur que la fonction. Ainsi l'exponentielle est une *fonction entière transcendante*.

La définition donnée n'implique pas contradiction, puisque la fonction e^z coïncide, pour les valeurs réelles de z, avec l'exponentielle étudiée dans les éléments. Elle est naturelle; car les propriétés fonctionnelles de l'exponentielle réelle sont conservées : une nouvelle propriété, relative à la périodicité, s'y ajoute.

On définit de même le sinus et le cosinus par les séries

$$(2) \quad \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

$$(3) \quad \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

(et l'on regarde la tangente comme le quotient du sinus par le cosinus).

Ces séries convergent absolument et uniformément dans tout domaine fini; elles sont continues ainsi que leurs dérivées : ce sont des *transcendantes entières* [1].

---

[1] *Inter incrementa splendidissima, mathesi per recentiorum labores adjecta, theoria functionum a circulo pendentium procul dubio locum imprimis insignem tenet. Cui mirabili quantitatum generi, ad quod in disquisitionibus maxime heterogeneis sæpissime deferimur, cujusque subsidio nulla universæ*

La combinaison des relations (2) et (3) donne

$$\cos z + i \sin z = e^{iz},$$
$$\cos z - i \sin z = e^{-iz}.$$

On retrouve ainsi, étendues aux variables complexes, les formules démontrées par Euler dans le cas des arguments réels

$$(4) \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Le sinus est une fonction impaire, le cosinus une fonction paire.

96. Première propriété : *Théorème d'addition algébrique.* — Son énoncé résulte des égalités

$$(5) \qquad \begin{cases} e^{z+z'} = e^{z} e^{z'}, \\ \cos(z + z') = \cos z \cos z' - \sin z \sin z', \\ \sin(z + z') = \sin z \cos z' + \sin z' \cos z. \end{cases}$$

Pour démontrer, par exemple, la première, appliquons aux séries e^{z} et $e^{z'}$ la règle de Cauchy (p. 128). Le produit a pour terme général

$$\frac{z^p}{p!} + z' \frac{z^{p-1}}{(p-1)!} + \ldots + \frac{z'^p}{p!} = \frac{1}{p!}(z + z')^p$$

et, par suite, est égal à $e^{z+z'}$ (1).

---

matheseos pars carere potest... [Gauss, *Disquisitiones arithmeticæ* (*Œuvres*, t. I, p. 412)].

Le nom de *fonctions circulaires* rappelle que $\sin x$ et $\cos x$ représentent l'abscisse et l'ordonnée de l'extrémité d'un arc de cercle de longueur algébrique x; de là leur rôle dans toute question impliquant la considération du cercle. Mais cette définition a le grave inconvénient de masquer certains caractères analytiques de ces fonctions, et surtout leurs relations avec l'exponentielle. *Cf.* Cauchy, *Leçons sur le calcul différentiel* (*Œuvres*, 2e série, t. IV, p. 408); *Résumés analytiques de Turin* (*Œuvres*, 2e série, t. X, p. 133); *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, t. III, p. 377 (édit. de 1842), t. IV, p. 232 et 272 (édit. de 1847).

(1) Cauchy avait démontré qu'une fonction continue réelle satisfaisant à la relation $f(x)f(x') = f(x + x')$ n'est autre que a^x (*Œuvres*, 2e série, t. III, p. 106). C'était ouvrir la voie à la définition de l'exponentielle par une propriété fonctionnelle : *une transcendante entière ayant un théorème d'addition du type ci-dessus, et coïncidant avec e^x pour les valeurs réelles de la variable n'est autre que l'exponentielle.*

Corollaires :

I. On en déduit l'égalité $(e^z)^n = e^{nz}$ pour toute valeur entière de n.

II. On a

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

On peut donc regarder e^z comme une grandeur complexe ayant pour module e^x et pour argument y.

III. La seconde des formules (5) donne

$$(6) \qquad \cos^2 z + \sin^2 z = 1.$$

Cette relation, associée aux équations (5), montre que le sinus et le cosinus ont un théorème d'addition algébrique.

97. Deuxième propriété : *Relations différentielles.* — En appliquant la règle de dérivation des séries entières, on obtient les relations

$$(7) \qquad De^z = e^z, \qquad D \sin z = \cos z, \qquad D \cos z = \sin z.$$

98. Troisième propriété : *Périodicité.* — *L'exponentielle a pour période* $2\pi i$; *le sinus et le cosinus ont pour période* 2π.

Si l'on suppose démontrée la périodicité des fonctions trigonométriques *réelles,* le théorème découle des formules d'addition. Mais il est intéressant d'obtenir cette propriété, comme toutes les autres, sans invoquer de considérations étrangères aux séries.

Ce procédé exige une définition analytique du nombre π [1]. Partons de la formule (3). Pour $z = 0$, le cosinus est positif, et pour $z = 2$, il est négatif. On en conclut que la fonction réelle *continue* $\cos x$ a au moins une racine entre 0 et 2; si elle en a plusieurs, l'une de ces racines est plus petite que les autres, puisque les zéros d'une fonction holomorphe sont isolés (p. 140). *C'est elle que nous appellerons* $\frac{\pi}{2}$.

[1] La définition *géométrique* de π n'est pas la meilleure, en ce sens qu'elle est seulement l'interprétation d'une des propriétés d'un nombre qui intervient dans bien des branches de l'Analyse.

Pour $x = \frac{\pi}{2}$, le sinus a la valeur ± 1, d'après la formule (6), et même la valeur 1. En effet, pour des valeurs de x positives et voisines de zéro, le sinus est positif ainsi que sa dérivée; il reste donc positif au moins jusqu'à la plus petite racine de cette dérivée.

La répétition de la formule d'addition donne alors

$$\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z, \qquad \cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin z,$$
$$\sin(z+\pi) = -\sin z, \qquad \cos(z+\pi) = -\cos z.$$

On en conclut la périodicité du sinus et du cosinus, et, à cause des relations (4), celle de l'exponentielle.

2π est une période *primitive* pour le sinus et le cosinus (1) : dès lors $2\pi i$ est période primitive pour l'exponentielle. L'exponentielle n'a pas d'autre période primitive (2).

Ainsi en résumé ces fonctions sont *simplement périodiques*.

99. Pour étudier l'exponentielle au point infini, posons $z = \zeta^{-1}$.

A l'intérieur d'un cercle de rayon arbitraire décrit de l'origine, *la fonction* $e^{\frac{1}{\zeta}}$ *prend toute valeur donnée, à l'exception des valeurs* 0 *et* ∞, *et cela en un nombre infini de points*.

En effet, on satisfait à l'égalité $e^{\frac{1}{\zeta}} = e^{a}$ en posant $\zeta = \frac{1}{a + 2\mu\pi i}$. Pour une valeur de μ assez grande, et pour les valeurs supérieures, $|\zeta|$ est inférieur à tout nombre positif donné.

Quand ζ *tend vers zéro, ni la fonction, ni son inverse n'ont de limite déterminée :* le point infini est un point d'indétermi-

---

(1) En effet, quand x croît de $-\pi$ à π, le cosinus croît de -1 à $+1$, en vertu des relations différentielles, puis revient de $+1$ à -1 en diminuant toujours. Donc de $-\pi$ à π, il y a deux valeurs de la variable et deux seulement (x_0 et x_1) pour lesquelles le cosinus prend une valeur donnée comprise entre -1 et 1. Le cosinus est une fonction paire; aussi x_0 et x_1 sont égaux et de signes contraires.

Toute période du sinus est période du cosinus. Or le sinus, fonction impaire, ne peut garder la même valeur en tous les points x_0 et $-x_0$. Il n'y a donc pas de nombre réel, inférieur à 2π, qui puisse être période commune au sinus et au cosinus, et dès lors période réelle pour le sinus ou le cosinus.

(2) Soit $a = \alpha + i\beta$ une période de l'exponentielle. L'égalité $e^{a} = 1$ donne

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 2\mu\pi.$$

nation, *un point singulier essentiel* pour la fonction e^z (p. 59), et dès lors, d'après les formules d'Euler, pour le sinus et le cosinus (et la tangente).

100. Quand z est positif, la série exponentielle est la limite vers laquelle tend $\left(1+\frac{z}{m}\right)^m$, m croissant indéfiniment par des valeurs entières et positives. *Le théorème subsiste lorsque z est complexe.*

En effet, donnons à m une valeur finie, et ordonnons la différence $e^z - \left(1+\frac{z}{m}\right)^m$ suivant les puissances de z. La série entière obtenue a ses coefficients réels et positifs; le module de sa somme ne dépasse pas la somme des modules de ses termes. On a donc

$$\left|e^z - \left(1+\frac{z}{m}\right)^m\right| \overline{\gtrless} e^{|z|} - \left(1+\frac{|z|}{m}\right)^m.$$

D'après le théorème rappelé, le second membre tend vers zéro pour m infini : il en sera de même du premier.

101. Examinons les représentations auxquelles les fonctions étudiées donnent naissance :

1° Soit

$$w = e^z \quad \text{ou} \quad u + iv = e^{x+iy}.$$

A un point z (à distance finie) correspond un point w, et un

Fig. 20.

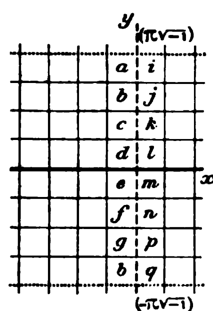
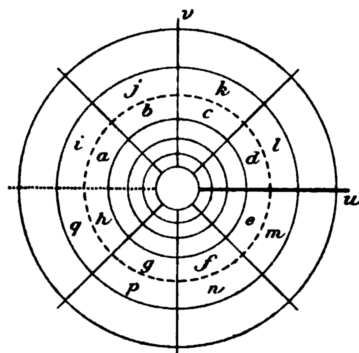


Fig. 21.



seul; à un point w ($w \gtrless 0$, w à distance finie) correspondent une infinité de points z, distants de 2π, situés sur une même parallèle à Oy. Le plan entier w se représente sur une *bande* z, com-

prise entre deux parallèles à Ox distantes de 2π : chaque bande est une région fondamentale (*fig.* 20 et 21).

Considérons la bande lieu des points tels que l'on ait $-\pi < y \leqq \pi$. Au segment de l'axe des y compris dans cette bande correspond, d'une manière univoque, la circonférence w de rayon 1 : la demi-bande *à gauche* de Oy correspond à l'*intérieur* de cette circonférence, la demi-bande *à droite* à l'*extérieur*.

Le point $z=\infty$ a pour image zéro ou l'infini, suivant que l'on s'en approche en restant à gauche ou à droite de Oy. Aux droites z parallèles aux axes correspondent des cercles et leurs rayons. De là la correspondance entre une bande du plan z, divisée en carrés, et le plan w, indiquée dans les figures ci-dessus.

La représentation du plan z exige une infinité de feuillets : on en formera une surface de Riemann en traçant dans chacun une coupure le long de la partie négative de l'axe des u, et en en soudant les bords de telle sorte que la variable w passe d'un feuillet au suivant (ou au précédent) chaque fois qu'elle la traverse.

2° L'égalité $w=\cos z$ conduit à une représentation du plan w sur une bande z de largeur 2π, limitée par deux parallèles à Oy. Cette fois une région fondamentale est constituée non plus par cette bande entière, car la fonction w prend en deux de ses points une valeur donnée, mais, par exemple, par l'aire comprise entre l'axe des y et une parallèle à cet axe menée à la distance π.

102. On ramène les transcendantes hyperboliques, comme les fonctions circulaires, à l'exponentielle, au moyen des égalités

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z+e^{-z}}{2}, \qquad \operatorname{sh} z = \frac{e^z-e^{-z}}{2}, \qquad \operatorname{th} z = \frac{e^z-e^{-z}}{e^z+e^{-z}}.$$

De là les formules

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1, \qquad \left\{\begin{array}{l} \cos zi = \operatorname{ch} z, \\ \sin zi = i \operatorname{sh} z, \\ \operatorname{tang} zi = i \operatorname{th} z, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{D} \operatorname{sh} z = \operatorname{ch} z, \\ \mathrm{D} \operatorname{ch} z = \operatorname{sh} z; \end{array}\right.$$

$$\operatorname{ch}(z+z') = \operatorname{ch} z \operatorname{ch} z' + \operatorname{sh} z \operatorname{sh} z',$$
$$\operatorname{sh}(z+z') = \operatorname{sh} z \operatorname{ch} z' + \operatorname{ch} z \operatorname{sh} z',$$
$$\operatorname{th}(z+z') = \frac{\operatorname{th} z + \operatorname{th} z'}{1+\operatorname{th} z \operatorname{th} z'};$$

$$\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots + \frac{z^{2n}}{2n!} + \ldots,$$
$$\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots.$$

La relation $w = \text{ch}\, z$ conduit à une représentation du plan z sur le plan w, que l'on ramène à deux représentations déjà étudiées (p. 73 et 173) en posant

$$w = \frac{1}{2}(\zeta + \zeta^{-1}), \qquad \zeta = e^z.$$

Chaque bande z, de largeur 2π (*fig.* 22 et 23), se représente

Fig. 22.

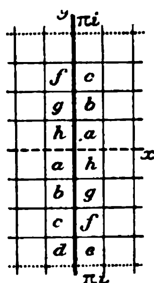
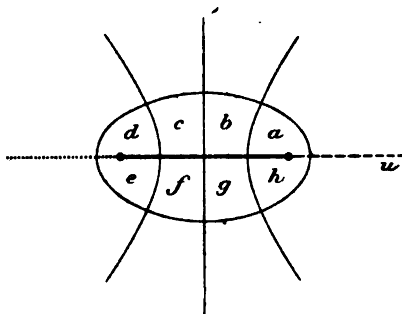


Fig. 23.



ainsi sur le plan w, la correspondance s'établissant comme l'indiquent les figures ci-dessus.

103. Terminons en montrant que l'exponentielle est une *transcendante* relativement aux fonctions déjà étudiées, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de relation algébrique entre z et e^z.

Le problème a été traité par Liouville (¹); on en déduit aujourd'hui la solution d'un théorème, dont voici l'énoncé (²) :

Lorsqu'une série entière à coefficients rationnels

$$w = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

représente le développement d'une racine w d'une équation

(¹) *Sur la classification des transcendantes* (*J. M.*, t. II, p. 68 et 77; 1837)

(²) *Cf.* HERMITE, *Cours de la Faculté des Sciences*, 4ᵉ édit., p. 195.

Ce théorème découle d'une proposition énoncée par Eisenstein (*C. R. de l'Ac. de Berlin*, 1852) et démontrée par Heine (*J. de Crelle*, t. 45, p. 285; *N. A.*, 1854, p. 245). *Voir* aussi TEIXEIRA, *A. E. N.*, 1886, p. 389. (On sait, du reste, qu'une équation algébrique, dont les coefficients sont des irrationnelles algébriques racines d'équations résolubles par radicaux, se ramène à une équation à coefficients rationnels entiers.)

Plus généralement, e^z *n'est racine d'aucune équation algébrique dans laquelle*

algébrique à coefficients entiers, une substitution $(z, \mu z)$ (μ *entier*) *permet de rendre* entiers *tous les coefficients de la série, sauf le premier.*

Ramenons d'abord à l'origine la racine w à étudier : l'équation algébrique qui la détermine s'écrira

$$(8) \qquad \varphi_0(z) + \varphi_1(z)w + \ldots + \varphi_n(z)w^n = 0.$$

Les polynomes φ_0, φ_1, ... ont pour expression

$$\varphi_0 = c_0 z + d_0 z^2 + \ldots, \qquad \varphi_1 = c_1 + d_1 z + \ldots, \qquad \varphi_2 = c_2 + d_2 z + \ldots,$$

c_1 est différent de zéro si, comme nous le supposons, $w = 0$ est racine simple; les coefficients c, d, ... sont entiers.

Posons

$$z = c_1^2 z', \qquad w = c_1 w'.$$

Après ce changement de variable (enlevons les accents et supprimons le facteur c_1^2), l'équation (8) prend la forme

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} & C_0 z + D_0 z^2 + \ldots + (1 + C_1 z + D_1 z^2 + \ldots) w \\ & \qquad + (C_2 + D_2 z + \ldots) w^2 + \ldots = 0, \end{aligned} \right.$$

les constantes C, D, ... étant toujours des entiers. Essayons pour la racine w un développement du type

$$w = b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_n z^n + \ldots,$$

---

les polynomes $\varphi_i(z)$ *auraient pour coefficients des irrationnelles algébriques quelconques.*

On le conclut d'un théorème de M. Lindemann montrant qu'une équation de la forme

$$(1) \qquad C_1 e^{z_1} + \ldots + C_m e^{z_m} = 0,$$

où les coefficients C_i sont des nombres algébriques, et les exposants z_i sont des nombres algébriques différents les uns des autres, est impossible. (*Voir* Lindemann, *M. A.*, t. XX. — Hilbert, Hurwitz, Gordan, *M. A.*, t. XLIII. — Weierstrass, *Ac. de Berlin*, 1885. — Weber, *Lehrbuch der Algebra*, 2ᵉ édit., t. II, p. 837.)

Cette proposition a de nombreux corollaires. Par exemple, elle apprend que les nombres e et π sont *transcendants :* le nombre e, car une égalité de la forme (1), où les C_i et les z_i auraient des valeurs entières, est impossible; le nombre π, car l'égalité $e^{i\pi} + 1 = 0$, qui définit ce nombre, ne pourrait avoir lieu si $i\pi$ (et dès lors π) était algébrique. *Elle montre que le nombre* e^z *est transcendant,* si z est algébrique ($z \lessgtr 0$), etc.

dont nous admettrons l'existence (n° 192). Les coefficients b s'obtiendront de proche en proche par identification : on voit que ce sont des entiers, en considérant l'équation (9), transformée préalablement au moyen des égalités

$$w = -\frac{C_0 z + D_0 z^2 + \ldots}{1 + C_1 z + \ldots} - \frac{C_2 + D_2 z + \ldots}{1 + C_1 z + \ldots} w^2 - \ldots,$$
$$= \quad M z + M' z^2 + \ldots + (N + N' z + \ldots) w^2 + \ldots,$$

où la division a donné pour M, M', ..., N, ... des valeurs entières. On a ainsi

$$b_1 = M, \qquad b_2 = M' + N b_1^2, \qquad \ldots.$$

Ces équations sont du premier degré et à coefficients entiers; chaque inconnue nouvelle b se trouve déterminée en fonction des précédentes par une équation où elle a pour coefficient l'unité. Ainsi tous les coefficients du développement sont bien devenus des nombres entiers.

Ce théorème admis, la transcendance de e^z apparaît, puisqu'aucune substitution du type $(z, \mu z)$ ne peut rendre entiers les coefficients de son développement.

La forme des séries qui définissent $\sin z$, $\log z$, $\operatorname{arc\,tang} z$ (n° 179) sert également de preuve à la transcendance de ces fonctions.

§ VII. — Fonctions inverses.

104. *Fonction logarithmique* (¹). — On la regarde comme la *fonction inverse* de l'exponentielle : ainsi un nombre w est le logarithme d'un nombre z lorsque l'on a $z = e^w$.

Tout nombre, s'il n'est ni nul ni infini, a une infinité de logarithmes : ils forment une progression arithmétique de raison $2\pi i$.

Posons

$$z = re^{i\theta}, \qquad w = u + iv \qquad (r \gtrless 0, \gtrless \infty).$$

Pour obtenir u et v, il faut résoudre l'équation $re^{i\theta} = e^{u+iv}$, qui

(¹) *Cf.* Cauchy, *Leçons sur le Calcul différentiel* (*Œuvres*, 2ᵉ série, t. IV, p. 411); *Résumés analytiques de Turin* (*Œuvres*, 2ᵉ série, t. X, p. 170).

entraîne

$$u = \mathrm{L}r, \qquad v = \theta + 2\mu\pi,$$

u, logarithme arithmétique d'un nombre positif, a une valeur et une seule; μ peut prendre toutes les valeurs entières (et la valeur 0).

Choisissons l'une de ces déterminations : en en cherchant la dérivée, par la méthode habituelle, on voit que le rapport à étudier a pour limite $\frac{1}{z}$.

Le logarithme est donc une fonction analytique : de plus, toutes ses branches ont en un même point la même dérivée.

La propriété caractéristique des logarithmes réels est conservée, à condition de choisir les déterminations, ou encore à un multiple près de $2\pi i$. Sous ces réserves, on a

$$\log(zz') = \log z + \log z', \qquad \log z^m = m \log z.$$

105. *Le logarithme est une fonction analytique uniforme dans tout domaine simplement connexe ne renfermant pas l'origine; à chaque rotation de la variable autour de l'origine, chaque détermination varie de $2\pi i$.*

En effet, considérons un point z; soient

$$w = \log z = \mathrm{L}r + (\theta + 2\mu\pi)i \qquad (\mu = 0, \pm 1, \ldots)$$

les déterminations du logarithme, et w_0, w_1, ... celles qui correspondent aux valeurs $\mu = 0, 1, \ldots$. Quand la variable, partant de ce point, y revient après avoir décrit dans le sens positif un contour fermé sans points multiples, son module reprend sa valeur initiale; son argument revient à sa valeur primitive ou à cette valeur augmentée de 2π, suivant que la variable n'a pas entouré ou a entouré l'origine. Dès lors, chaque circulation transforme w_0 en w_1, w_1 en w_2, ... L'origine est un point singulier d'une nature moins simple que le point critique algébrique : on l'appelle *point critique logarithmique*. La fonction ne reprend jamais sa valeur initiale, par la circulation, dans un sens déterminé, autour d'un pareil point. Une étude directe ou la substitution (z, z^{-1}) montre que le logarithme a un *second* point critique logarithmique à l'infini.

Le logarithme devient uniforme par une coupure (artificielle) allant de o à l'infini.

106. La représentation de toutes les déterminations exige une infinité de plans z. En soudant convenablement ces feuillets suivant leur coupure commune, on forme une surface de Riemann, sur laquelle le logarithme est une fonction uniforme.

Dans l'une des déterminations du logarithme, le coefficient de i satisfait aux inégalités $-\pi < v \leqq \pi$: on l'appelle *détermination principale* (p. 81). Elle permet de représenter le plan z sur la bande limitée par les droites $v = -\pi$, $v = \pi$.

De même la branche pour laquelle on a

$$(2\mu - 1)\pi < v \leqq (2\mu + 1)\pi$$

fait correspondre au plan z une nouvelle bande w.

Il y a exception pour le voisinage des points o et ∞.

107. *Fonction z^n.* — La relation $z = e^{\log z}$ conduit à *définir z^n*, n étant *quelconque*, par l'égalité

$$z^n = e^{n \log z}.$$

Log$z$ a une infinité de valeurs; aussi z^n est une fonction multiforme, dont les déterminations s'obtiennent en multipliant l'une d'elles par $e^{n.2\mu\pi i}$. Si n est irrationnel ou imaginaire, z^n a une *infinité* de valeurs: elles forment une *progression géométrique*, et l'on passe de l'une à l'autre en tournant autour de l'origine. Ainsi l'origine apparaît comme *un point critique transcendant d'une espèce différente de celles rencontrées précédemment.*

108. *Arc tang z.* — On dit que w est un arc dont la tangente est z, et l'on écrit $w = \text{arc tang} z$, si l'on a $z = \text{tang} w$ (¹).

Cette définition donne

$$z = \frac{1}{i}\frac{e^{wi} - e^{-wi}}{e^{wi} + e^{-wi}}, \qquad w = \frac{1}{2i}\log\frac{i - z}{i + z}.$$

On est ramené à l'étude d'un logarithme. Dès lors :

1° A une valeur de z correspondent pour le logarithme une

(¹) *Cf.* CAUCHY, *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*. t. IV, p. 266 et 280 (édit. de 1847). — BRIOT et BOUQUET, *Théorie des fonctions elliptiques*. 2ᵉ édit., p. 97.

infinité de valeurs en progression arithmétique de raison $2\pi i$: l'arc tang aura une infinité de valeurs en progression de raison π.

2° Le logarithme qui sert d'expression à la fonction w a pour points critiques les points i et $-i$; w augmente de π, diminue de π, reprend sa valeur initiale, suivant que le point z entoure, dans le sens positif, le point i, le point $-i$, les points i et $-i$.

L'arc tang a pour dérivée $(1+z^2)^{-1}$: c'est une fonction analytique.

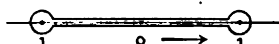
109. *Arc sin z.* — La fonction $w = \arcsin z$ est la *fonction inverse* de la fonction $z = \sin w$. D'où les relations

$$z = \frac{e^{wi} - e^{-wi}}{2i}, \qquad w = \frac{1}{i}\log(zi \pm \sqrt{1-z^2}).$$

L'arc sinus a donc pour points singuliers les points dans le voisinage desquels la quantité soumise au logarithme cesse d'être uniforme (les points ± 1), ou bien devient nulle ou infinie (le point ∞).

Les points $z = \pm 1$. — Partons de l'origine avec une détermination de w (par exemple zéro) et faisons décrire à z dans le sens positif un contour simple entourant le point 1. *En suivant par continuité* la valeur w ainsi fixée, on voit qu'elle a augmenté de π, quand z est revenu à l'origine (on a donc passé de l'une des valeurs de w correspondant, pour $z = 0$, à l'un des signes du radical, à une des valeurs correspondant à l'autre signe) (*fig.* 24).

Fig. 24.



A ce moment, la fonction peut être représentée par la formule

$$w = \pi - \frac{1}{i}\log(iz + \sqrt{1-z^2}),$$

dans laquelle le logarithme a à l'origine la valeur o.

Si l'on entoure une seconde fois le point 1, on revient à l'origine avec la valeur initiale. Si, au contraire, on poursuit en décrivant un contour entourant le point -1, on revient au point de départ avec la détermination initiale (zéro) augmentée de 2π.

Soit w_1 la valeur de l'arc sinus lorsqu'on va de l'origine à un point arbitraire z par un chemin particulier. Un chemin quelconque (oz) se ramène par déformation continue, sans que l'on traverse de point critique, à ce chemin particulier précédé ou suivi d'un certain nombre de fois les lacets $(+1)$, (-1). Suivant que l'on parcourt un même lacet un nombre pair de fois, un couple de lacets, un lacet unique, la fonction varie de o, de 2π, de π (et, dans ce dernier cas, les deux valeurs de $\sqrt{1-z^2}$ s'échangent dans la rotation). Dès lors, *en chaque point, l'arc sinus a une double infinité de déterminations,* comprises dans les formules

$$w = 2\mu\pi + w_1, \qquad w = (2\mu+1)\pi - w_1.$$

Des lacets décrits autour de l'un des points ± 1 ou de leur ensemble permettent de passer *de l'une quelconque des déterminations de l'arc sinus à une autre détermination quelconque* (¹).

Le point $z = \infty$. — Par déformation continue et sans traverser de point singulier, on peut ramener une circonférence de rayon très grand à un chemin entourant les points -1 et $+1$ (*fig.* 24) : donc chaque détermination varie aussi de 2π lorsqu'on entoure le point infini.

C'est ce que confirme le changement de variable ordinaire $z = \zeta^{-1}$; il donne

$$w = \frac{1}{i}\left[\log i + \log(1 \pm \sqrt{1-\zeta^2}) - \log\zeta\right].$$

Logζ augmente de $2\pi i$, et w diminue de 2π, quand ζ parcourt dans le sens positif un cercle décrit de l'origine avec un rayon inférieur à l'unité. Ainsi le point ∞ est un point critique *logarithmique* pour l'arc sinus.

A la formule d'addition du sinus, qui résulte des égalités

$$\sin w = z, \qquad \sin w_1 = z_1, \qquad \sin(w + w_1) = z\sqrt{1-z_1^2} + z_1\sqrt{1-z^2},$$

(¹) Parfois ces points ± 1 sont dits points critiques *algébriques*, parce que, la variable tournant autour de l'*un d'eux*, l'une quelconque des déterminations de la fonction prend seulement deux valeurs différentes, qui deviennent égales en ce point. Mais, contrairement à ce qui arrivait pour les fonctions algébriques, si l'on combine les lacets relatifs aux *deux* points critiques, on obtient en chaque point une *infinité* de valeurs.

correspond, pour un choix convenable des déterminations, la relation

$$\text{arc}\sin z + \text{arc}\sin z_1 = \text{arc}\sin\left(z\sqrt{1-z_1^2} + z_1\sqrt{1-z^2}\right).$$

La somme de deux arcs ayant pour sinus des nombres donnés z et z_1 y est représentée par un arc dont le sinus a une valeur reliée *algébriquement* à ces nombres.

§ VIII. — Fonctions trigonométriques (produits infinis).

110. A la place des séries, on peut prendre comme point de départ de la théorie des transcendantes circulaires les produits infinis. *La première fonction à définir est alors le sinus :* on lui associe deux autres fonctions que l'on en déduit par dérivation.

Dès le milieu du XVIII[e] siècle, Euler avait établi la relation ([1])

$$\sin z = z\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z^2}{\mu^2\pi^2}\right)\cdots.$$

Ce produit infini converge absolument dans tout domaine borné, puisque les séries $\sum\frac{1}{\mu^2}$, $\sum\frac{|z^2|}{\mu^2\pi^2}$ convergent pour toute valeur finie de z. Mais il est plus commode de définir avec Weierstrass le sinus par la formule ([2])

$$(1)\qquad \sin z = z\prod_{\mu=-\infty}^{+\infty}{}'\left[\left(1-\frac{z}{\mu\pi}\right)e^{\frac{z}{\mu\pi}}\right].$$

Laissons de côté le facteur z. Pour démontrer la convergence absolue du produit (1), il suffit d'établir celle de la série ayant

([1]) Euler a ramené les fonctions trigonométriques aux exponentielles et fait connaître d'importantes formules relatives à leurs développements. Cf. *Introductio in Analysim infinitorum*.

([2]) Lorsque, dans une somme ou un produit infini, μ doit prendre toutes les valeurs entières, *zéro excepté*, on indique cette restriction par un accent ′ placé à la suite des symboles $\sum$ et $\prod$. Dans les séries multiples, par exemple dans les séries doubles où figurera $w = \mu\omega + \mu'\omega'$, le signe $\sum'$ indiquera que l'on doit exclure de la sommation le système $\mu = \mu' = 0$.

pour terme général

$$\left(1-\frac{z}{\mu\pi}\right)e^{\frac{z}{\mu\pi}}-1=-\frac{z^2}{\mu^2\pi^2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\frac{z}{\mu\pi}+\ldots\right).$$

Cette série est comparable à celle qui a pour terme général $\frac{1}{\mu^2}$ (dans ces deux séries, le rapport des modules des termes de même rang a une limite finie) et, par suite, converge absolument. Il en est de même du produit (1), abstraction faite du facteur z, et aussi lorsqu'on rétablit ce facteur ([1]).

La substitution $\left(z,\ z+\frac{\pi}{2}\right)$ effectuée dans $\sin z$ donne un nouveau produit infini que l'on appellera $\cos z$.

111. *Première fonction associée au sinus.* — La série qui représente $\log\sin z$ est convergente ([2]); dérivons-la terme par terme. La série obtenue,

$$(2)\qquad \frac{1}{z}+\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty}{}'\left(\frac{1}{z-\mu\pi}+\frac{1}{\mu\pi}\right)\qquad(\mu=\pm1,\ \pm2,\ \ldots),$$

converge absolument, sauf aux points $\mu\pi$ et 0, et elle converge uniformément dans tout domaine fini ne contenant aucun de ces points : on le voit en comparant son terme général à celui de la série $\sum\frac{1}{\mu^2}$. Par suite, la série (2) représente la dérivée logarithmique de $\sin z$: on l'appellera $\cot z$.

La cotangente est donc une fonction uniforme; elle est impaire. Ses pôles sont mis en évidence; ce sont des pôles simples du résidu $+1$.

([1]) Cette fonction est analytique uniforme. C'est une fonction impaire. *Tous* ses zéros sont en évidence (p. 146). Le point à l'infini est une singularité essentielle puisque la substitution $\left(z,\ \frac{1}{z}\right)$ donne une fonction ayant une infinité de racines dans le voisinage de l'origine.

([2]) Cette série a pour terme général $\frac{z}{\mu\pi}+\log\left(1-\frac{z}{\mu\pi}\right)$; sa convergence se démontre immédiatement, si l'on suppose connu le développement du logarithme (n° 179). Du reste, au Chapitre VIII, cette convergence résultera d'une proposition générale.

Seconde fonction associée. — La série obtenue en dérivant terme par terme la série (2) converge absolument et *uniformément* (avec les mêmes restrictions que ci-dessus) : elle représentera donc la dérivée de la cotangente. Appelons-la $p(z)$; on aura

$$(3)\qquad p(z) = -\frac{d}{dz}\cot z = \frac{1}{z^2} + \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{(z-\mu\pi)^2}.$$

Cette fonction est paire; elle a pour pôles doubles les points o et $\mu\pi$.

112. Ces égalités permettent d'obtenir les principaux résultats concernant les fonctions circulaires, par exemple les formules d'addition ([1]); démontrons la *périodicité*.

La substitution $(z, z+\pi)$ dans le second membre des égalités (2) ou (3) revient à un déplacement des termes; π est donc une période pour $\cot z$ et $p(z)$.

On peut aussi établir la périodicité de la cotangente en remontant aux fonctions primitives dans la relation

$$p(z+\pi) = p(z),$$

la constante se déterminera par la valeur particulière $z = -\frac{\pi}{2}$. On a bien ainsi

$$\cot(z+\pi) = \cot z,$$

et en répétant la même opération

$$\sin(z+\pi) = -\sin z,$$

ce qui prouve la périodicité du sinus. Pour la déduire directement de la relation (1), associons les facteurs qui correspondent aux valeurs de μ égales et de signe contraire (p. 146), ce qui donne la formule d'Euler

$$\frac{\sin z}{z} = \left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z^2}{\mu^2\pi^2}\right)\cdots.$$

([1]) *Cf.* EISENSTEIN, *J. de Crelle*, t. 35, p. 191; *N. A.*, 1897, p. 341.

Après la démonstration du n° 114, nous pourrons remplacer la fonction $p(z)$ par $\frac{1}{\sin^2 z}$.

Appelons $\frac{\varphi(z)}{z}$ le produit des 2μ premiers facteurs linéaires du second membre, et désignons par C une constante convenable. On aura

$$\frac{\varphi(z)}{z} = C(z-\pi)(z+\pi)\dots(z-\mu\pi)(z+\mu\pi).$$

Divisons membre à membre les termes de cette égalité et de celle qu'on obtiendrait en y remplaçant z par $z+\pi$; il vient

$$\frac{\varphi(z+\pi)}{\varphi(z)} = \frac{z+(\mu+1)\pi}{z-\mu\pi}.$$

Pour μ infini, le second membre tend vers -1; le premier a pour limite $\frac{\sin(z+\pi)}{\sin z}$. Le sinus a bien 2π pour période.

113. Il reste à montrer que les fonctions trigonométriques définies par des séries sont identiques à celles que viennent de fournir les produits infinis. Euler y est parvenu par diverses voies : dans la plus simple, il cherche d'abord l'expression, sous forme de produit infini, du *sinus hyperbolique* ([1]).

La définition de $\operatorname{sh} z$ (p. 174) et celle de l'exponentielle (p. 173) conduisent à considérer le polynome entier en z

$$f(m) = \frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{z}{m}\right)^m - \left(1-\frac{z}{m}\right)^m\right]$$

(m est un entier positif déterminé, par exemple impair).

Ses zéros sont définis par l'équation

$$\frac{1+\dfrac{z}{m}}{1-\dfrac{z}{m}} = e^{\frac{2\mu\pi i}{m}} \qquad \left(\mu = 0, \pm 1, \dots, \pm\frac{m-1}{2}\right).$$

Ils ont donc les m valeurs

$$z = im \operatorname{tang}\frac{\mu\pi}{m}.$$

(Pour abréger, nous désignerons par t_μ le produit $m \operatorname{tang}\frac{\mu\pi}{m}$.)

([1]) *Cf.* TANNERY et MOLK, *Fonctions elliptiques*, t. I, p. 104.

Dans le polynome f, le terme du premier degré en z a pour coefficient l'unité, et les racines sont deux à deux égales et de signes contraires : aussi l'on peut écrire

$$f(m) = z\left(1+\frac{z^2}{t_1^2}\right)\left(1+\frac{z^2}{t_2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{z^2}{t_{\frac{m-1}{2}}^2}\right).$$

Soit p un entier positif fixe inférieur à $\frac{m-1}{2}$; remplaçons le polynome $f(m)$ par le produit de deux polynomes $f_1(m, p)$, $f_2(m, p)$ renfermant respectivement les $p+1$ premiers facteurs de $f(m)$, et les facteurs restants. On aura

$$f_1(m, p) = z\left(1+\frac{z^2}{t_1^2}\right)\quad\cdots\left(1+\frac{z^2}{t_p^2}\right),$$

$$f_2(m, p) = \left(1+\frac{z^2}{t_{p+1}^2}\right)\cdots\left(1+\frac{z^2}{t_{\frac{m-1}{2}}^2}\right),$$

$$f(m) = f_1(m, p)\, f_2(m, p).$$

Faisons grandir m indéfiniment par des valeurs entières et positives. $f(m)$ a pour limite sh$z$, d'après la définition du n° **102**; t_μ a pour limite $\mu\pi$ (μ demeurant fixe), et par suite $f_1(m, p)$ tend vers

$$z\left(1+\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{z^2}{4\pi^2}\right)\cdots\left(1+\frac{z^2}{p^2\pi^2}\right).$$

Les fonctions f et f_1 ayant chacune une limite (on peut supposer que celle de f_1 n'est pas nulle), f_2 aura aussi une limite, qui ne dépendra plus que de p. *Pour p infini, cette limite tend vers l'unité.*

En effet, le polynome $f_2(m, p) - 1$, ordonné suivant les puissances de z, a ses coefficients positifs : on ne peut donc qu'augmenter son module en remplaçant z par $|z|$, ce qui donne

$$|f_2(m, p) - 1| \overline{\leq} \left(1+\frac{|z^2|}{t_{p+1}^2}\right)\cdots\left(1+\frac{|z^2|}{t_{\frac{m-1}{2}}^2}\right) - 1.$$

Les arcs $\frac{\mu\pi}{m}$ étant compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, leurs modules sont inférieurs à ceux de leurs tangentes, et l'on a

$$|t_\mu| > |\mu\pi|.$$

d'où, *a fortiori*,

$$|f_2(m,p)-1| < \left[1+\frac{|z^2|}{(p+1)^2\pi^2}\right]\cdots\left[1+\frac{|z^2|}{\left(\frac{m-1}{2}\right)^2\pi^2}\right]-1.$$

La convergence des séries $\sum\frac{1}{\nu^2}$, $\sum\frac{|z^2|}{\nu^2\pi^2}$, entraîne celle du produit infini de terme général $1+\frac{|z^2|}{\nu^2\pi^2}$; à tout nombre positif donné ε correspond donc un entier N tel que le second membre de la dernière inégalité n'atteigne pas ε, pour toute valeur de p supérieure à N. Dès lors, f_2 a pour limite l'unité quand m d'abord, p ensuite, croissent indéfiniment. D'où la formule

$$(3)\qquad \operatorname{sh} z = z\left(1+\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\cdots\left(1+\frac{z^2}{p^2\pi^2}\right)\cdots.$$

114. Une méthode analogue conduit directement à l'expression de $\operatorname{ch} z$; mais il vaut mieux utiliser la formule (3). Elle donne

$$\operatorname{ch} z = \frac{\operatorname{sh} 2z}{2\operatorname{sh} z} = \frac{(2z)\left[1+\frac{(2z)^2}{\pi^2}\right]\left[1+\frac{(2z)^2}{2^2\pi^2}\right]\cdots\left[1+\frac{(2z)^2}{\mu^2\pi^2}\right]\cdots}{2z\left(1+\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\cdots\left(1+\frac{z^2}{\mu^2\pi^2}\right)\cdots},$$

d'où, après suppression des facteurs communs

$$(4)\qquad \operatorname{ch} z = \prod_{\mu=1}^{\infty}\left[1+\frac{z^2}{\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}\right].$$

Les définitions du sinus et du cosinus par des séries donnaient

$$\sin z = \frac{1}{i}\operatorname{sh} zi,\qquad \cos z = \operatorname{ch} zi.$$

Remplaçons dans ces formules $\operatorname{sh} zi$ et $\operatorname{ch} zi$ par leurs valeurs déduites des formules (3) et (4); il vient

$$\sin z = z\prod_{\mu=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\mu^2\pi^2}\right),\qquad \cos z = \prod_{\mu=1}^{\infty}\left[1-\frac{z^2}{\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\pi^2}\right].$$

On retrouve bien les formules dont on était parti (p. 182).

Remarque. — La substitution $(z, \pi z)$ donne

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \left(1 - \frac{z^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{2^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{z^2}{\mu^2}\right)\cdots,$$

les zéros du second membre deviennent égaux à la suite des nombres entiers. Observons que les produits infinis

$$\left(1 - \frac{z}{1}\right)\left(1 - \frac{z}{2}\right)\cdots\left(1 - \frac{z}{n}\right)\cdots,$$

$$\left(1 + \frac{z}{1}\right)\left(1 + \frac{z}{2}\right)\cdots\left(1 + \frac{z}{p}\right)\cdots$$

ne sont pas tous deux convergents; aussi leur produit n'a pour limite $\frac{\sin \pi z}{\pi z}$ que si n et p *demeurent égaux* en croissant indéfiniment.

115. Quant aux fonctions inverses, voici des produits infinis, de convergence rapide, qui servent d'expression à l'arc cosinus et au logarithme [1]. Pour simplifier, supposons l'argument réel. En répétant m fois l'identité

$$\frac{\sin \frac{\alpha}{p}}{\frac{\alpha}{p}} = \cos \frac{\alpha}{2p} \frac{\sin \frac{\alpha}{2p}}{\frac{\alpha}{2p}} \qquad (p = 1, 2, 2^2, \ldots, 2^{m-1});$$

il vient

$$\frac{\sin \alpha}{\alpha} = \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2^2} \cdots \cos \frac{\alpha}{2^m} \frac{\sin \frac{\alpha}{2^m}}{\frac{\alpha}{2^m}},$$

d'où, en faisant grandir m indéfiniment,

$$\alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2^2} \cdots \cos \frac{\alpha}{2^r} \cdots}.$$

Posons alors $\cos \alpha = x$; $\cos \frac{\alpha}{2^r} = x_r$, et remarquons que les nombres x_r s'expriment algébriquement en fonction de x par les

---

(1) *Cf.* SEIDEL, *J. de Crelle*, t. 73, p. 273.

formules

$$x_1 = \sqrt{\frac{1}{2}(1+x)},$$
$$x_2 = \sqrt{\frac{1}{2}(1+x_1)},$$
$$x_3 = \sqrt{\frac{1}{2}(1+x_2)},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots;$$

on a finalement

$$\text{arc}\cos x = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x_1 x_2 \dots x_r \dots}.$$

Cette formule peut représenter l'une quelconque des déterminations de l'arc cosinus. En effet, x étant donné, supposons que l'on ait fait choix de α; x_1, x_2, ..., x_r, ..., auront des valeurs déterminées, qu'il suffira de porter dans la relation précédente pour avoir, en fonction de x, la détermination cherchée.

De l'arc cosinus on passe au logarithme en posant ($y > 0$)

$$\alpha = i \log y, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad x = \frac{1}{2}(y + y^{-1}).$$

ce qui donne ([1])

$$\log y = \frac{\frac{1}{2}(y - y^{-1})}{\frac{1}{2}\left(y^{\frac{1}{2}} + y^{-\frac{1}{2}}\right)\frac{1}{2}\left(y^{\frac{1}{2^2}} + y^{-\frac{1}{2^2}}\right)\dots\frac{1}{2}\left(y^{\frac{1}{2^r}} + y^{-\frac{1}{2^r}}\right)\dots}.$$

§ IX. — Fonction eulérienne.

116. Legendre a appelé *intégrale eulérienne* de deuxième espèce l'expression

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt \qquad (x \text{ réel et } > 0 ; t \text{ réel})$$

([1]) Cette formule peut aussi s'obtenir *directement* en partant de l'identité

$$\frac{\log y}{y - y^{-1}} = \frac{1}{\frac{1}{2}\left(y^{\frac{1}{2}} + y^{-\frac{1}{2}}\right)} \frac{1}{\frac{1}{2}\left(y^{\frac{1}{4}} + y^{-\frac{1}{4}}\right)} \cdots \frac{1}{\frac{1}{2}\left(y^{\frac{1}{2^r}} + y^{-\frac{1}{2^r}}\right)} \frac{\log y^{\frac{1}{2^r}}}{y^{\frac{1}{2^r}} - y^{-\frac{1}{2^r}}},$$

et en y faisant croître r indéfiniment (dans la dernière fraction, pour en chercher la vraie valeur, on posera $y^{\frac{1}{2^r}} = 1 + \varepsilon$, ε tendant vers zéro).

et l'a représentée par $\Gamma(x)$. Ici il s'agit, à la suite de Gauss, de définir dans tout le plan la fonction eulérienne par un produit infini. Avec Gauss posons [1]

$$(1)\quad \Pi(n, z) = \frac{1.2\ldots(n-1)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)} n^z \qquad \begin{pmatrix} n \text{ entier} \\ z \text{ réel ou imaginaire} \end{pmatrix}.$$

Pour n infini, ce produit converge, quel que soit z (sauf quand z est un entier négatif), et définit une fonction uniforme : on l'appelle *fonction eulérienne* et on la représente par $\Gamma(z)$.

Pour démontrer cette convergence, considérons le produit infini

$$\Pi(2, z)\frac{\Pi(3, z)}{\Pi(2, z)}\cdots\frac{\Pi(n+1, z)}{\Pi(n, z)}\cdots.$$

Son terme général peut s'écrire

$$\frac{\Pi(n+1, z)}{\Pi(n, z)} = \frac{n}{n+z}\,\frac{(n+1)^z}{n^z} = \left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^z.$$

Chaque facteur est développable en série entière, pour les valeurs $|z| < n$ (n° 179). Le terme de rang n a donc la forme

$$\left(1-\frac{z}{n}+\frac{z^2}{n^2}+\ldots\right)\left[1+\frac{z}{n}+\frac{z(z-1)}{1.2.n^2}+\ldots\right] = 1+\frac{A_n}{n^2},$$

A_n désignant une expression dont la limite, pour n infini, est $\frac{z(z-1)}{2}$.

La série de *terme* général $\frac{A_n}{n^2}$ converge absolument; il en sera donc de même du produit infini considéré, ce qui justifie l'existence de $\Gamma(z)$.

On écrit indifféremment

$$\Gamma(z) = \lim_{n=\infty} \frac{(n-1)!\, n^z}{z(z+1)\ldots(z+n-1)} = \lim_{n=\infty} \frac{n^z}{z\left(1+\frac{z}{1}\right)\cdots\left(1+\frac{z}{n}\right)}.$$

Dans le dernier dénominateur, on a introduit le facteur $1+\frac{z}{n}$, dont la limite est l'unité.

---

(1) Gauss, *Œuvres*, t. III, p. 144. — *Voir* aussi Legendre, *Exercices de Calcul intégral*, t. III (édit. de 1817), les cent premières pages.

Par n^z on entend $e^{z\,\mathrm{L}n}$, Ln désignant la valeur positive du logarithme.

117. La fonction eulérienne jouit des propriétés suivantes :

1° Dans tout domaine fini, on a

$$\Pi(n, z+1) = \frac{zn}{z+n}\Pi(n, z),$$

d'où, en faisant grandir n indéfiniment, la relation fondamentale

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{2}$$

2° Dans cette relation, changeons z en $z+1, z+2, \ldots, z+k$, et multiplions membre à membre les égalités obtenues; il vient

$$\Gamma(z+k) = z(z+1)\ldots(z+k-1)\Gamma(z); \tag{3}$$

l'étude de la fonction dans le domaine réel est ramenée à celle de la fonction dans l'intervalle $(0, 1)$.

$\Gamma(1) = 1$; d'où, si z est un *entier* positif, la formule

$$\Gamma(z) = 1.2\ldots(z-1). \tag{4}$$

Gauss fait remarquer que cette égalité définirait mal la fonction $\Gamma(z)$, non seulement parce qu'elle suppose z entier, mais parce qu'elle convient à une infinité de fonctions, par exemple à $\cos\pi z^{2n}\Gamma(z)$.

3° On a

$$\Pi(n, z)\Pi(n, -z) = -\frac{[1.2\ldots(n-1)]^2}{z^2(1-z^2)\ldots(\overline{n-1}^2 - z^2)}$$

$$= -\frac{\frac{\pi}{z}}{\pi z\left(1-\frac{z^2}{1}\right)\cdots\left(1-\frac{z^2}{\overline{n-1}^2}\right)}.$$

Faisons grandir n indéfiniment, et reportons-nous à l'expression du sinus en produit infini (p. 188); il vient

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z\sin\pi z},$$

et dès lors, en se servant de la relation (2),

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z}.$$

Cette formule importante ramène l'étude de la fonction dans l'intervalle $(0, 1)$ à celle de la fonction dans l'intervalle $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

On en déduit, en désignant par μ un entier arbitraire $(\mu > 1)$,

$$\Gamma\left(\frac{1}{\mu}\right)\Gamma\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)\Gamma\left(\frac{2}{\mu}\right)\Gamma\left(\frac{\mu-2}{\mu}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\mu}\right) = \frac{\pi^{\mu-1}}{\prod_{\nu=1}^{\mu-1} \sin\frac{\nu\pi}{\mu}}.$$

Transformons le produit des sinus, et pour cela remarquons que ses facteurs, si on les multiplie par 2, sont les modules des facteurs linéaires de $\frac{x^{\mu}-1}{x-1}$, quand on y fait $x = 1$. Il vient

$$\Gamma\left(\frac{1}{\mu}\right)\Gamma\left(\frac{2}{\mu}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{\mu-1}{2}}}{\sqrt{\mu}}.$$

4° La fonction $\Pi(n, z)$, en apparence plus générale que la fonction $\Gamma(z)$, peut y être ramenée. En effet, la combinaison des équations (1), (3), (4) donne

$$\Pi(n, z) = n^z \frac{\Gamma(n)\Gamma(z)}{\Gamma(n+z)}.$$

Cette formule rappelle la relation entre les intégrales eulériennes de première et de deuxième espèce.

Plus tard nous donnerons d'autres propriétés de la fonction eulérienne, et ses relations avec la *fonction* $\zeta(z)$ *de Riemann*, que l'on peut considérer comme définie par la série

$$\zeta(z) = 1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \ldots + \frac{1}{n^z} + \ldots,$$

z étant une variable dont la partie réelle surpasse l'unité.

§ X. — Séries hypergéométriques.

118. « Après les transcendantes élémentaires, on regarde habituellement les fonctions elliptiques comme les plus intéressantes .... Néanmoins, on peut réclamer une importance au moins égale pour les *fonctions hypergéométriques*, à cause de leurs nombreuses applications en Astronomie et en Physique mathéma-

tique » [1]. Par *fonctions hypergéométriques* on entend les intégrales de certaines équations différentielles linéaires du second ordre, dont les coefficients sont des fonctions uniformes ayant trois pôles et n'ayant pas de singularités essentielles [2].

Ici nous avons à parler de la *série hypergéométrique* que Gauss a introduite [3]. C'est une fonction de *quatre* éléments α, β, γ, z. On peut les regarder tous comme variables, ou supposer que les trois premiers sont des paramètres dont on a fixé les valeurs : on a alors une série entière. Grâce aux indéterminées qui y figurent, cette série sert à représenter un grand nombre de fonctions : les transcendantes étudiées plus haut en sont des cas particuliers [4].

119. Cette série hypergéométrique de Gauss est définie par l'égalité

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha.\beta}{1.\gamma} z + \ldots + \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{1.2\ldots n.\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} z^n + \ldots,$$

α, β, γ étant des nombres réels ou imaginaires. Le rapport d'un terme au précédent

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^2 + (\alpha+\beta)n + \alpha\beta}{n^2 + (\gamma+1)n + \gamma} z$$

a pour limite z : donc la série converge ou diverge suivant que

---

(1) KLEIN, *Conférences du Congrès de Chicago*, cinquième conférence.

(2) Ces équations, dites *hypergéométriques*, rentrent dans le type

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \sum\left(\frac{1-q_i}{x-a_i}\right)\frac{dy}{dx} + \frac{1-\sum q_i}{4}\sum\frac{1-q_1-q_2+q_3}{(x-a_1)(x-a_2)} y = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Dans le cas où $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = \infty$, un changement de variable les ramène à la forme de Gauss

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma - x(\alpha+\beta+1)]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0.$$

(3) GAUSS, *Œuvres*, t. III, p. 125. Le Mémoire est de 1812.

(4) On s'en convainct en parcourant les très nombreuses formules groupées par Kummer dans son Mémoire sur cette série (*J. de Crelle*, t. 15, p. 39 et 127). L'exponentielle intervient dans l'intégration des équations linéaires à coefficients constants; la série de Gauss dans celle des équations hypergéométriques.

l'on a $|z| < 1$ ou $|z| > 1$. Sur le cercle de convergence la règle même donnée par Gauss [1] (il supposait réels les paramètres α, β, γ) montre que la série converge pour $(\gamma + 1) - (\alpha + \beta) > 1$; elle diverge pour $\gamma \overline{\gtrless} \alpha + \beta$.

Conclusion analogue si α, β, γ sont complexes : en désignant par α', β', γ' leurs parties réelles, la condition de convergence est $\gamma' > \alpha' + \beta'$ [2].

La série n'a pas de sens si γ est un entier négatif; elle se réduit à un polynome quand α ou β est un entier négatif.

La dérivée d'une série hypergéométrique est une série de même type, puisque l'on a

$$\frac{d\,F(\alpha, \beta, \gamma, z)}{dz} = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1, z).$$

Appelons *fonctions contiguës* celles que l'on déduit de la série F *en augmentant ou diminuant d'une unité* ses éléments α, β, γ.

La série F a dès lors six contiguës : elle est reliée à deux quelconques d'entre elles par une équation linéaire ayant pour coefficients des polynomes du premier degré en z. De là, entre une fonction et ses contiguës, quinze relations que Gauss a formées (*Œuvres*, t. III, p. 130).

Voici l'une d'elles

$$\begin{aligned}\gamma[\gamma - 1 - (2\gamma - \alpha - \beta - 1)z]\,&F(\alpha, \beta, \gamma, z)\\ &- \gamma(\gamma - 1)(1 - z)\,F(\alpha, \beta, \gamma - 1, z)\\ &+ (\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)z\,F(\alpha, \beta, \gamma + 1, z) = 0.\end{aligned}$$

120. Indiquons les relations entre la série hypergéométrique et d'autres fonctions classiques.

Les fonctions algébriques, les transcendantes circulaires et logarithmiques en sont des cas particuliers. On le constate en

---

(1) Gauss, *Œuvres*, t. III, p. 139.

(2) *Cf.* Jordan, *Analyse* (1re édit., t. I, p. 154).

Ces séries ont été généralisées : par exemple, M. Thomæ a considéré des fonctions de même type dans lesquelles aux trois éléments α, β, γ on en a substitué cinq. (Cf. *J. de Crelle*, t. 87, p. 26; t. 70, p. 258, etc.)

écrivant les égalités (GAUSS, *Œuvres*, t. III, p. 127)

$$(t+u)^n = t^n F\left(-n, \beta, \beta, -\frac{u}{t}\right) \qquad (\beta \text{ est arbitraire}),$$

$$\log(1+t) = t\,F(1, 1, 2, -t),$$

$$e^t = F\left(1, \beta, 1, \frac{t}{\beta}\right) \qquad (\beta \text{ infini}),$$

$$\cosh t = F\left(\alpha, \beta, \frac{1}{2}, \frac{t^2}{4\alpha\beta}\right) \qquad (\alpha \text{ et } \beta \text{ infinis}),$$

$$\sin t = t\,F\left(\alpha, \beta, \frac{3}{2}, -\frac{t^2}{4\alpha\beta}\right),$$

$$t = \sin t\, F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \sin t^2\right),$$

....

121. Elle a des liens étroits avec les fonctions sphériques, les fonctions de Bessel, et surtout les fonctions eulériennes.

Fonctions eulériennes. — Pour $z = 1$, la dernière relation (n° **119**) devient

$$\frac{F(\alpha, \beta, \gamma, 1)}{F(\alpha, \beta, \gamma+1, 1)} = \frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma-\alpha-\beta)}.$$

Dans cette égalité, remplaçons γ par $\gamma+1, \ldots, \gamma+k-1$; et multiplions membre à membre les résultats obtenus. On a

$$\frac{F(\alpha, \beta, \gamma, 1)}{F(\alpha, \beta, \gamma+k, 1)} = \frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\alpha+1)\ldots(\gamma-\alpha+k-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+k-1)} \, \frac{(\gamma-\beta)\ldots(\gamma-\beta+k-1)}{(\gamma-\alpha-\beta)\ldots(\gamma-\alpha-\beta+k-1)}.$$

Pour k infini, $F(\alpha, \beta, \gamma+k, 1)$ tend vers 1 ; et

$$\frac{1.2\ldots(k-1)}{z(z+1)\ldots(z+k-1)} k^z$$

a pour limite $\Gamma(z)$. On a donc, en introduisant haut et bas les mêmes facteurs,

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)},$$

formule donnée par Gauss [1].

---

[1] *Œuvres*, t. III, p. 144. — On en trouvera une autre démonstration dans HERMITE, *Cours, etc.*, 4ᵉ édition, p. 292.

122. *Fonctions sphériques ou de Laplace* [1]. — On appelle *polynome sphérique* tout polynome homogène satisfaisant à l'équation de Laplace (p. 51).

Considérons le cas de trois variables x, y, z. Entre les $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ coefficients que renferme un polynome sphérique P_n de degré n, il y a $\frac{n(n-1)}{2}$ relations déterminées par l'équation $\Delta P_n = 0$. Il reste donc, dans P_n, $2n+1$ coefficients arbitraires.

Des polynomes sphériques on passe aux *fonctions sphériques* en introduisant les coordonnées polaires et en posant

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = r\cos\theta.$$

Faisons r constant : P_n devient une fonction de φ et de θ, dite *fonction sphérique*.

Laplace, qui le premier a considéré ces fonctions, représentait $P_n(x, y, z)$ par $r^n Y_n(\theta, \varphi)$. Ainsi Y_n est une fonction homogène, de degré n, des quantités $\cos\theta$, $\sin\theta\cos\varphi$, $\sin\theta\sin\varphi$, telle que le produit $r^n Y_n$ satisfasse à l'équation $\Delta(r^n Y_n) = 0$, ce qui donne

$$\frac{\partial^2 Y_n}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_n}{\partial\varphi^2} + \cot\theta\frac{\partial Y_n}{\partial\theta} + n(n+1)Y_n = 0.$$

C'est l'équation qui a servi de point de départ à Laplace pour la théorie des fonctions Y_n [2].

---

[1] Ce furent des recherches relatives au potentiel de points distribués sur une sphère fixe qui amenèrent Laplace à considérer ces fonctions [1782, cf. *Théorie des attractions des sphéroïdes* (*Œuvres*, t. X, p. 362)]. Gauss leur donna le nom de *fonctions sphériques* (1828, cf. *Œuvres*, t. VI, p. 648). Pour leur étude *cf.* Heine, *Handbuch der Kugelfunctionen*, ou l'Ouvrage plus élémentaire déjà cité : Byerly, *An elementary treatise on Fourier's series, and spherical, cylindrical and ellipsoïdal harmonics* (Boston, 1893).

Dans le cas où φ est aussi constant, les fonctions sphériques reproduisent, à une constante près, les fonctions de Legendre.

[2] Ces considérations nous font sortir du domaine des fonctions analytiques. Aussi nous énoncerons seulement la propriété suivante, très intéressante au point de vue de la représentation des fonctions.

Dans des cas étendus, *une fonction arbitraire*, finie et uniforme, d'une seule variable, est développable *en série de Fourier;* de même, sous certaines conditions, une fonction de deux variables, $F(\theta, \varphi)$, finie et uniforme, choisie arbitrairement sur la surface d'une sphère, peut être représentée par *une série de La-*

123. *Fonctions de Fourier-Bessel* [1]. — Ces fonctions, rencontrées par Fourier et étudiées par Bessel, jouent dans l'étude du potentiel du cylindre, spécialement pour la théorie de la chaleur, le même rôle que les fonctions sphériques dans l'étude du potentiel de la sphère. Aussi on les appelle fréquemment *fonctions cylindriques*.

On peut les regarder comme les limites de fonctions sphériques [2]; de là l'analogie des théorèmes relatifs à ces deux types de fonctions. Ici on les considère comme les coefficients des puissances de z dans le développement en série de la fonction $e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}$.

---

place, c'est-à-dire par une série ayant pour éléments des fonctions sphériques. Ainsi on aura

$$F(\theta, \varphi) = Y_0(\theta, \varphi) + Y_1(\theta, \varphi) + \ldots + Y_n(\theta, \varphi) + \ldots.$$

Pour justifier cette assertion, on procède comme pour établir le théorème de Fourier : on suppose l'existence du développement de la fonction arbitraire sous forme de série uniformément convergente du type énoncé ; on en détermine les coefficients par l'intégration terme par terme de cette série, en s'appuyant sur ce que les intégrales $\iint Y_m Y_n \, d\sigma$ ($m \gtrless n$) étendues à toute la surface de la sphère sont nulles; enfin on montre que la série formée converge et a pour somme la fonction à représenter.

De fait, pour que l'on puisse prouver cette convergence, il suffit que la fonction satisfasse aux conditions suivantes, analogues *aux conditions de Dirichlet :*

1° *La fonction est finie et uniforme.*

2° Si l'on décrit du point (θ, φ) comme pôle, avec une distance polaire ω comme rayon, un cercle situé sur la sphère, et si l'on désigne par $f(\omega)$ la moyenne des valeurs de la fonction $F(\theta, \varphi)$ sur la circonférence de ce cercle, $f(\omega)$ *n'a pas une infinité de maxima et de minima quand* ω *tend vers zéro.*

3° *La valeur de la fonction au point* (θ, φ) *est la limite de la moyenne de ces valeurs.*

Dans ces conditions, la fonction $F(\theta, \varphi) = \lim_{\omega=0} f(\omega)$ est représentée par le développement en série de Laplace ci-dessus.

La démonstration de Laplace a été reprise par Dirichlet : *Sur les séries dont le terme général dépend de deux angles, et qui servent à exprimer des fonctions arbitraires entre des limites données* (*J. de Crelle*, t. 17). *Cf.* Poincaré, *Propagation de la chaleur*, p. 265 et 270. — Picard, *Analyse*, 2e édit., t. I, p. 279. — Jordan, *Analyse*, 2e édit., t. II, p. 252. — Et aussi Frobenius, *Ueber die Entwickelung analytischer Functionen in Reihen, die nach gegebenen Functionen fortschreiten* (*J. de Crelle*, t. 73).

(1) *Cf.* Tisserand, *Mécanique céleste*, t. I, p. 206. — Nicolas, *A. E. N.*, 1882, etc.

(2) Heine, *Die Fourier-Bessel'sche Function* (*J. de Crelle*, t. 69, 1868).

Soit $z \gtrless 0$; les développements en série de l'exponentielle donnent

$$e^{\frac{x}{2}z} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha!}\left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha} z^{\alpha}, \qquad e^{-\frac{x}{2z}} = \sum_{\beta=0}^{\infty} \frac{1}{\beta!}(-1)^{\beta}\left(\frac{x}{2}\right)^{\beta} z^{-\beta},$$

et, par suite,

$$e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)} = \sum_{\alpha=0}^{\infty}\sum_{\beta=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\beta}}{\alpha!\,\beta!}\left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha+\beta} z^{\alpha-\beta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) z^n,$$

en posant

$$J_n(x) = \sum_{\beta=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\beta}}{\beta!(n+\beta)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\beta}.$$

Ces coefficients J_n sont les fonctions de Bessel ([1]). Elles se ramènent aux séries hypergéométriques, comme étant la limite des fonctions $F\left(\alpha, \beta, \gamma, -\frac{x^2}{4\alpha\beta}\right)$, quand α et β deviennent infinis ([2]).

124. Mais c'est surtout dans l'intégration des équations hypergéométriques que les séries hypergéométriques interviennent. Une simple substitution montre que l'équation de Gauss (p. 193) a pour intégrales

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) \quad \text{et} \quad x^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x).$$

Aussi doit-on regarder cette équation comme la véritable origine de ces transcendantes ([3]).

([1]) Ces fonctions J satisfont à l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d^2 J}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dJ}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)J = 0.$$

([2]) HANSEN, *Abhandlung der Sächsischen Gesellschaft*, t. II, p. 252; 1855.

([3]) *Hæcce æquatio differentio-differentialis tanquam definitio exactior functionis nostræ considerari potest; sed quoniam* $y = F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ *non est integrale completum, sed particulare tantum (quod constantes non accesserunt) adjicere oportet conditionem, ut* y *incipiat a valore* 1 *pro* $x = 0$, *simulque pro valore eodem ipsius* x, *supponuntur*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha\beta}{\gamma} \quad \textit{atque} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}$$

(GAUSS, *Œuvres*, t. III, p. 207).

CHAPITRE III.

FONCTIONS DÉFINIES PAR DES SÉRIES MULTIPLES.

Suivant la division adoptée, nous ferons dans la première Section une étude générale des séries multiples; dans la seconde, nous l'appliquerons à des transcendantes classiques.

SECTION I.

§ I. — Séries multiples en général.

125. Commençons par les séries à double entrée ([1]).

Soit un ensemble infini d'éléments u_{ik}, pourvus chacun de deux indices, qui prennent indépendamment l'un de l'autre une infinité de valeurs, par exemple toutes les valeurs entières positives et la valeur zéro. On se donne un pareil ensemble, en fixant la loi qui détermine un terme quelconque, en fonction de ses indices.

On peut, et d'une infinité de manières, *établir une correspondance biunivoque entre ces éléments et la suite des entiers positifs* (p. 15). L'ordre des éléments une fois fixé, si l'on pose

([1]) Leur étude a été commencée par Cauchy [*Cours d'Analyse* (*Œuvres*, 2e série, t. III, p. 441); *Résumés analytiques de Turin* (*Œuvres*, 2e série, t. X, p. 66 et 175)]. Dans ses définitions, quelques points ont été précisés ou modifiés.

$u_{ik} = v_n$, n désignant le rang du terme, v_n a une valeur déterminée.

Lorsqu'un rangement des termes u_{ik} conduit ainsi à une série simple (v) convergente, on dit que la *série double* (u) *converge* pour cette disposition particulière des éléments; lorsque la série (v) est absolument convergente, on dit que la *série* (u) *converge absolument.*

A une suite double correspondent une infinité de séries simples : elles ont les mêmes éléments et diffèrent par leur rangement. Dès qu'une série (v) converge absolument, toutes ces séries convergent et ont même somme : la série double (u) a une valeur indépendante de la loi de rangement.

On donne de cette définition une image géométrique, commode surtout dans l'étude des séries entières, en supposant chaque élément u_{ik} placé au point (i, k) d'un plan xOy. De là, un *Tableau* d'éléments : on peut parler de la convergence absolue de ce Tableau, de la $p^{\text{ième}}$ ligne, de la $q^{\text{ième}}$ colonne, du groupement des éléments par diagonales (c'est-à-dire en termes w tels que $w_p = u_{p0} + u_{p-1\,1} + \ldots + u_{0p}$). Si l'on considère, dans un Tableau absolument convergent, les éléments intérieurs à une suite de courbes $C_1, \ldots, C_n, \ldots$ s'étendant à l'infini, les sommes correspondantes $S_1, \ldots, S_n, \ldots$ ont une limite et cette limite demeure la même quelle que soit la forme des courbes C et la manière dont elles s'éloignent à l'infini (p. 117) ([1]).

Rattachons cette définition à celle de la *limite d'une suite infinie d'éléments à double indice*. Une pareille suite (s) d'éléments s_{mn} tend vers une limite lorsqu'à tout nombre positif donné ε on peut faire correspondre des entiers M et N tels que, pour toutes les valeurs de m et n supérieures à M et N, on ait

$$|s_{m+\mu, n+\nu} - s_{m,n}| < \varepsilon \qquad (\mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

([1]) Les séries dont les éléments dépendent d'un *indice unique*, prenant toutes les valeurs de $-\infty$ et $+\infty$, sont dites *convergentes* quand les deux séries formées par les termes à indices positifs et à indices négatifs convergent *séparément*. Si chacune converge absolument, on peut intervertir l'ordre de leurs termes, les grouper, etc. (p. 115 et 117).

En disposant sous forme de Tableau les termes des suites doubles, rien n'empêche de supposer illimitées dans les deux sens les suites qui constituent les lignes et les colonnes.

c'est-à-dire lorsqu'il existe un nombre s tel que

$$|s_{mn} - s| < \varepsilon \quad ([1]).$$

Dès lors, formons deux Tableaux respectivement avec les sommes s_{mn} et σ_{mn} de tous les termes u_{ik} et $|u_{ik}|$ dont les indices prennent toutes les valeurs ne dépassant pas m et n ($m, n = 0, 1, 2, \ldots$). On peut dire que la série double (u) converge absolument, lorsque la suite d'éléments σ_{mn} tend vers une limite et réciproquement (puisque les sommes σ_{mn} correspondent à un rangement particulier des termes $|u_{ik}|$). Dans ce cas la suite s_{mn} a aussi une limite au sens ci-dessus ([2]), et cette limite s est la somme de la série (u).

126. Supposons maintenant que la série (v), correspondant à un rangement particulier des éléments (u), soit *semi-convergente*. La somme de la série (v) peut être regardée comme définissant *une* valeur de la série (u); mais alors à cette série (u) correspondront des séries (v) ayant une infinité de valeurs différentes.

Aussi, pour donner un sens précis au symbole $\sum u_{ik}$, représentant la somme d'éléments *rangés en Tableau*, on donne parfois une définition nouvelle et l'on dit que *cette série double*

([1]) Pour qu'une pareille suite ait une limite, il n'est pas nécessaire que les éléments de *chaque* ligne (ou colonne) tendent vers des limites.

Exemple. — La suite (s), définie par l'égalité

$$s_{mn} = (-1)^{m+n}\left(\frac{1}{m^p} + \frac{1}{n^q}\right) \qquad (m, n = 1, 2, \ldots; p > 0, q > 0),$$

a une limite (zéro); néanmoins les termes de la $n^{\text{ième}}$ ligne n'ont pas de limite quand m devient infini : ils ont pour limites inférieure et supérieure $-n^{-q}$ et n^{-q}. (*Cf.* PRINGSHEIM, *Mémoires de l'Académie de Munich*, 1897, p. 104.)

([2]) Si l'on veut déduire directement de la convergence absolue de la série (u) sa convergence, on raisonne comme pour les séries simples. Des inégalités

$$\left|\sum u_{pq}\right| \leqq \sum |u_{pq}|$$

on tire

$$|s_{m+\mu,\, n+\nu} - s_{m,\, n}| \leqq \sigma_{m+\mu,\, n+\nu} - \sigma_{m,\, n} \qquad (\mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

par suite si les σ_{mn} ont une limite il en est de même des s_{mn}.

ou que le Tableau (u) *converge lorsque la suite* s_{mn} (formée comme au numéro précédent) *a une limite* [1].

Un Tableau est proprement ou improprement divergent suivant qu'il a une limite infinie, ou reste indéterminé.

Réciproquement, une série simple peut être regardée comme la somme des termes d'une série double. Quand elle converge absolument, on peut disposer comme l'on veut ses éléments en Tableau et en faire la somme d'après une loi arbitraire.

127. Revenons aux suites absolument convergentes. Pour en obtenir la somme s on peut ranger leurs éléments dans un ordre arbitraire, et même en groupes ayant chacun une infinité de termes (p. 117).

Dès lors, si on les dispose en Tableau dans un ordre quelconque, d'abord *chaque ligne,* illimitée ou non dans les deux sens

$$u_{p0} + u_{p1} + \ldots + u_{pq} + \ldots,$$

forme une série absolument convergente. Soit s_p sa somme.

Puis *la série formée par les sommes s_p converge absolument et a pour somme s.*

Ainsi la divergence d'une seule ligne (ou colonne) entraîne la non convergence absolue du Tableau.

Réciproquement :

1° Étant donné un Tableau *à termes positifs* ou nuls, *il suffit,* pour sa convergence absolue, qu'à chaque ligne corresponde une série convergente, et que la série formée par l'ensemble de ces séries soit elle-même convergente.

En effet, soit s la somme de cette dernière série : la somme d'autant de termes que l'on veut, pris dans le Tableau, croît lorsqu'on en augmente le nombre, sans jamais dépasser s.

---

(1) *Exemple.* — En ce sens, la série double

$$u_{ik} = \frac{(-1)^{i+k}}{i+k+1} \qquad (i, k = 0, 1, 2, \ldots)$$

converge et a pour somme $\frac{1}{2}$.

2° Étant donné un Tableau *à termes quelconques, il ne suffit pas* que chaque série s_p converge absolument, ainsi que la série formée par ces sommes s_p, pour que l'on puisse affirmer la convergence absolue du Tableau ([1]).

128. Pour un Tableau qui converge, mais ne converge pas absolument, les démonstrations sont moins simples : énonçons quelques résultats ([2]).

([1]) Ces remarques sont dues à Cauchy (*Œuvres*, 2e série, t. III, p. 444).

Le théorème dit *de Cauchy* (p. 128, *note*) en est un cas particulier. En effet, à deux séries simples absolument convergentes, ayant pour terme général u_m et u'_n, et pour sommes s et s', correspond un Tableau absolument convergent, tel que la ligne de rang p ait pour éléments

$$u_p u'_0, \quad u_p u'_1, \quad \ldots, \quad u_p u'_q, \quad \ldots.$$

Dans ce Tableau, faisons la somme des éléments par lignes, puis la somme des lignes : on a pour résultat ss'. Aussi ss' représente la somme des éléments du Tableau *groupés dans un ordre quelconque,* et en particulier *par diagonales.*

([2]) *Cf.* Stolz, *M. A.*, t. XXIV, p. 157. — Pringsheim, *Mémoires de l'Académie de Munich,* 1897.

Si un Tableau, ayant ses lignes convergentes, est proprement divergent, il en est de même de la série formée par les sommes de ses lignes. *Un Tableau peut converger,* ainsi que la série formée par les sommes des termes des diagonales, *sans que les lignes convergent.* Un Tableau n'est jamais convergent lorsque chaque ligne et chaque colonne converge, mais que les séries formées par l'ensemble des lignes et l'ensemble des colonnes, tout en convergeant, *ont des sommes différentes.*

Exemple. — Un Tableau (u) pour lequel $s_{mn} = \dfrac{m}{m+n}$ diverge; néanmoins

$$\lim_{n=\infty}\left(\lim_{m=\infty} s_{mn}\right) = 1, \qquad \lim_{m=\infty}\left(\lim_{n=\infty} = s_{mn}\right) = 0.$$

Enfin, un Tableau peut converger sans que les termes d'une ligne (ou colonne) tendent vers zéro quand on s'éloigne indéfiniment sur la ligne.

Exemple. — Un Tableau (u) pour lequel

$$s_{mn} = \frac{(-1)^{m+n}}{2(a+1)}\left(\frac{1}{a^m} + \frac{1}{a^n}\right) \qquad (a > 1;\ m, n = 0, 1, 2, \ldots)$$

converge : or on a

$$u_{mn} = (-1)^{m+n}\left(\frac{1}{a^m} + \frac{1}{a^n}\right)$$

(sauf pour les termes de la première ligne et ceux de la première colonne).

Donc les termes ne tendent pas vers zéro quand on s'éloigne indéfiniment sur une ligne.

Considérons un pareil Tableau; soit s sa somme :

1° *Quand chaque ligne converge la série formée par les sommes des lignes converge et a pour somme s.*

2° *Si chaque ligne et chaque colonne convergent, ainsi que la série formée par les sommes des termes des diagonales, cette dernière série a aussi s pour somme.*

3° *Si chaque ligne et chaque colonne convergent ou oscillent entre des limites finies, il en est de même de la série formée par les sommes des termes des diagonales.*

Enfin, *la condition nécessaire et suffisante pour qu'un Tableau converge, quel que soit l'ordre de rangement de ses termes, c'est qu'il converge absolument* [1].

129. La convergence *uniforme* d'une série double (s), absolument convergente sur un ensemble fermé, est définie par celle de la série simple correspondante. Dès lors, si en dérivant la série (s), on obtient une série (σ) à termes continus, absolument et uniformément convergente dans l'ensemble, cette série (σ) est dans cet ensemble la dérivée de (s).

130. Pour décider de la convergence d'une suite double, souvent on procède *par comparaison.*

---

[1] Comparons ces théorèmes avec les propositions relatives aux intégrales doubles étendues à un champ infini :

1° Posons

$$I = \iint f(x, y)\, dx\, dy, \qquad J = \iint |f(x, y)|\, dx\, dy.$$

Dans les séries multiples absolument convergentes, l'ordre de rangement des termes est indifférent. De même si l'intégrale J étendue à un champ infini a une limite, c'est-à-dire si l'intégrale I *converge absolument,* on peut étendre à un champ infini cette intégrale, sans se préoccuper de la manière dont le champ grandit.

Dans les séries multiples semi-convergentes, il faut tenir compte de l'ordre des termes. De même, quand l'intégrale J n'a pas de sens, l'intégrale I peut avoir seulement des valeurs qui dépendent de la loi adoptée pour étendre à l'infini le champ d'intégration.

2° A une intégrale convergente de champ infini correspondent une infinité de

1° Une suite à termes positifs ou nuls est convergente quand ses éléments ne dépassent pas ceux d'une autre suite convergente à termes positifs.

2° Une suite absolument convergente reste convergente, quand on multiplie ses éléments par des facteurs bornés.

131. Une règle, due à Cauchy, relie la convergence ou la divergence de certaines séries à termes positifs à la détermination d'intégrales de fonctions *positives décroissantes,* étendues à un champ infini [1].

En voici l'énoncé dans le cas des séries doubles :

Étant donnée une fonction $u(x, y)$, positive à l'extérieur d'une courbe fermée C, allant en décroissant quand le point (x, y) s'éloigne de l'origine, et tendant vers zéro quand il s'en éloigne indéfiniment, suivant que l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int\int u(x, y)\,dx\,dy,$$

---

séries convergentes; la réciproque n'est pas vraie. Montrons-le pour une intégrale simple.

La convergence de l'intégrale $\int_a^\infty f(x)\,dx$ entraîne celle de la série

$$\int_a^{a_1} f(x)\,dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,dx + \ldots$$

$$\left(a < a_1 < \ldots < a_n < \ldots;\ \lim_{n=\infty} a_n = \infty\right).$$

Réciproquement, soit $f(x) = \cos x$; $a_n = n\pi$. La série ci-dessus converge, bien que l'intégrale n'ait pas de sens.

3° Rappelons que, si dans toute série convergente le terme de rang n tend vers zéro, au contraire dans une intégrale convergente à limite infinie, *même à éléments tous positifs,* la fonction $f(x)$ peut *ne tendre vers aucune limite,* et même augmenter indéfiniment un nombre infini de fois. (Pour des exemples, *cf.* GILBERT, *B. D.,* 1888, p. 66.)

[1] CAUCHY, *Sur la convergence des séries* [*Anciens exercices de Mathém.* (*Œuvres,* 2ᵉ série, t. VII, p. 272)]. Cauchy s'en sert pour établir la convergence de la série $\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^\alpha}$ $(\alpha > 1)$ si souvent prise comme terme de comparaison, et Riemann (*Œuvres,* trad., p. 420) pour démontrer la convergence des séries θ p^{uplement} infinies (n° 158).

étendue à la portion infinie de plan extérieure à la courbe C, *a ou non une limite, la série*

$$\sum u(\mu,\nu) \qquad \left(\begin{array}{c}\mu,\ \nu \text{ prennent toutes les valeurs entières}\\ \text{correspondant aux points extérieurs à C}\end{array}\right)$$

est elle-même convergente ou divergente.

En effet, supposons fini le volume que définit l'intégrale I. La série peut être considérée comme représentant un volume plus petit : celui d'une somme de parallélépipèdes ayant pour bases des carrés dont les côtés sont parallèles aux axes, ont pour longueur l'unité, et dont les sommets sont extérieurs à la courbe C. Leurs hauteurs respectives sont égales à la valeur du terme $u(\mu,\nu)$ correspondant dans chaque carré de base au sommet de coordonnées (μ,ν) *le plus éloigné* de l'origine. Cette somme va en croissant avec le nombre des éléments de la suite sans dépasser une grandeur fixe, le volume I. Donc la série est bien convergente.

Pour obtenir la conclusion opposée dans le cas où le volume I est infini, on donne pour hauteur à chaque parallélépipède la valeur du terme $u(\mu,\nu)$ qui correspond au sommet de son carré de base *le plus voisin* de l'origine.

132. Exemple. — *La série*

$$\sum{}' \frac{1}{(\mu^2+\nu^2)^\alpha} \qquad \left(\begin{array}{c}\mu,\nu=0,\pm 1,\pm 2,\ldots\\ \mu=\nu=0 \text{ exclus}\end{array}\right)$$

converge pour $\alpha > 1$; *sinon elle diverge* $(\alpha \gtreqless 0)$.

En effet, la règle de Cauchy, ici applicable, conduit à étudier l'intégrale

$$I = \iint \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^\alpha}$$

étendue aux points extérieurs à une circonférence de rayon arbitraire r, décrite de l'origine.

L'introduction des coordonnées polaires donne

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_r^R \frac{d\rho}{\rho^{2\alpha-1}} = 2\pi \int_r^R \frac{d\rho}{\rho^{2\alpha-1}},$$

expression qui n'a de sens, pour R infini, que dans l'hypothèse $\alpha > 1$ [1].

A la série que nous venons d'étudier se ramène la série

$$\sum{}' \frac{1}{(a\mu^2 + 2b\mu\nu + c\nu^2)^\alpha} \quad \begin{pmatrix} \mu, \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ \mu = \nu = 0 \text{ exclus} \end{pmatrix},$$

lorsque la forme quadratique qui y figure est *définie et positive*, c'est-à-dire si a et $ac - b^2$ sont positifs.

En effet, pour vérifier la convergence de cette série dans l'hypothèse $\alpha > 1$, il suffit de montrer que l'on peut toujours trouver un nombre positif k, tel que l'on ait, pour tout système de valeurs de μ et de ν,

$$\frac{1}{a\mu^2 + 2b\mu\nu + c\nu^2} < \frac{1}{k} \frac{1}{\mu^2 + \nu^2},$$

ou bien

$$(a - k)\mu^2 + 2b\mu\nu + (c - k)\nu^2 > 0.$$

C'est ce qui a lieu si l'on définit k par les conditions compatibles

$$a > k > 0, \qquad (a - k)(c - k) - b^2 > 0.$$

En particulier, soient ω et ω' deux nombres dont le *rapport* soit imaginaire : la série

$$\sum{}' \frac{1}{(2\mu\omega + 2\nu\omega')^3} \quad \begin{pmatrix} \mu, \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ \mu = \nu = 0 \text{ exclus} \end{pmatrix}$$

est convergente. Voici du reste comment Eisenstein ramène cette série à celle étudiée au début.

---

(1) Si l'on veut, évitant toute interprétation géométrique, ranger linéairement les termes, on dira : fixons leur ordre de placement en partant de l'équation $|\mu| + |\nu| = e$, où e désigne un entier positif. Écrivons successivement les quatre termes, les huit termes, ..., qui correspondent à $e = 1, 2, \ldots$ et réunissons en un élément unique les $4e$ termes relatifs à chaque valeur de e. Il suffit d'établir la convergence de la série ainsi formée.

Or, pour chacun des termes figurant dans un de ses éléments, on a

$$\frac{e^2}{4} < \mu^2 + \nu^2 \leqq e^2;$$

donc les éléments eux-mêmes sont compris entre $\frac{4e}{e^{2\alpha}}$ et $\frac{4^\alpha . 4e}{e^{2\alpha}}$. La série de terme général $e^{1-2\alpha}$ converge pour $\alpha > 1$, et diverge pour $\alpha \leqq 1$: il en sera de même de la série considérée.

Considérons μ et ν comme des coordonnées cartésiennes et désignons par $2a$ le grand axe de l'ellipse

$$|2\mu\omega + 2\nu\omega'|^2 = 1$$

(cette ellipse *existe* bien en vertu de l'hypothèse sur le rapport des nombres ω et ω'). En tous ses points, on a

$$\mu^2 + \nu^2 \leqq 4a^2|2\mu\omega + 2\nu\omega'|^2.$$

Cette inégalité, homogène en μ et ν, subsiste si l'on remplace μ et ν par des grandeurs proportionnelles. Donc, non seulement sur l'ellipse, mais en tout point (μ, ν), on a

$$\frac{1}{|2\mu\omega + 2\nu\omega'|^3} \leqq \frac{8a^3}{(\mu^2+\nu^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

La série ayant pour terme général l'expression écrite au second membre est convergente; donc il en est de même de la série proposée ([1]).

133. *Séries multiples.* — Les éléments des suites à 2 ou à p indices forment un ensemble dénombrable. Dès lors, il n'y a pas de différence entre la théorie des séries doubles et celle des séries multiples, puisque, dans les deux cas, *aux éléments de la suite on peut faire correspondre d'une manière univoque les termes d'une suite linéaire infinie.* Cette correspondance établie, on posera

$$u_{\mu_1,\ldots,\mu_p} = v_n.$$

Une suite p^{uple} est convergente pour une disposition particulière de ses termes, si la série simple correspondante (v) converge. Elle converge absolument, si l'une des séries (v) converge

([1]) Ces séries, comme celle du numéro suivant, sont appelées *séries d'Eisenstein.* Ce géomètre s'en est occupé à propos de la représentation des fonctions elliptiques par des quotients de produits infinis, dans son Mémoire : *Genaue Untersuchung der unendlichen Doppelproducte ... und Doppelreihen* (*J. de Crelle*, t. 35, 1847). *Cf.* aussi HURWITZ, *Ueber Riemann's Convergenzcriterium* (*M. A.*, t. XLIV, 1894).

absolument. On peut alors y faire tous les groupements de termes indiqués page 117 ([1]).

Il est parfois commode d'imaginer les termes placés dans les cases d'un parallélépipède rectangle à p dimensions ouvert indéfini, ce qui permet de regarder un Tableau convergent, mais non absolument convergent, comme ayant une valeur unique (p. 201).

Le théorème de Cauchy (p. 205) s'étend aux séries multiples. Comme exemple, généralisons la série d'Eisenstein et étudions la somme

$$\sum{}' \frac{1}{(\mu_1^2+\mu_2^2+\ldots+\mu_p^2)^\alpha} \qquad \begin{pmatrix} \mu_1, \ldots, \mu_p = 0, 1, 2, \ldots \\ \mu_1 = \ldots = \mu_p = 0 \text{ exclus} \end{pmatrix}.$$

L'intégrale de comparaison à introduire

$$\int\int\cdots\int \frac{dx_1\,dx_2\ldots dx_p}{(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_p^2)^\alpha},$$

pourra être exprimée en généralisant la transformation

$$x = \rho\sin\theta\sin\psi, \qquad y = \rho\sin\theta\cos\psi, \qquad z = \rho\cos\theta,$$

([1]) On obtient pour les séries représentant des fonctions des domaines de convergence en général beaucoup plus étendus en substituant à la notion de *série multiple* la notion de *série n fois infinie*. Voici la définition qu'en donne M. Mittag-Leffler. Au symbole

$$u = \sum_{\lambda_1=0}^{\infty}\sum_{\lambda_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{\lambda_n=0}^{\infty} u_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}$$

associons les séries simples

$$u_{\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}} = \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} u_{\lambda_1\ldots\lambda_n}, \qquad u_{\lambda_1\ldots\lambda_{n-2}} = \sum_{\lambda_{n-1}=0}^{\infty} u_{\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}},$$

......................,

$$u_{\lambda_1} = \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} u_{\lambda_1\lambda_2}, \qquad u = \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} u_{\lambda_1}.$$

Lorsque toutes ces séries convergent pour une certaine valeur des variables, on dit que la série u est *une série n fois infinie convergente* pour cette valeur; lorsque toutes ces séries convergent uniformément dans un domaine commun situé à l'intérieur du domaine d'existence des éléments $u_{\lambda_1\ldots\lambda_n}$, on dit que la série u est *une série n fois infinie uniformément convergente* dans ce domaine (*A. M.*, t. XXIV, p. 189).

c'est-à-dire en posant

$$\begin{aligned}
x_p &= \rho \cos\theta_{p-1},\\
x_{p-1} &= \rho \sin\theta_{p-1}\cos\theta_{p-2},\\
x_{p-2} &= \rho \sin\theta_{p-1}\sin\theta_{p-2}\cos\theta_{p-3},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
x_3 &= \rho \sin\theta_{p-1}\dots\dots\sin\theta_3\cos\theta_2,\\
x_2 &= \rho \sin\theta_{p-1}\dots\dots\sin\theta_3\sin\theta_2\cos\theta_1,\\
x_1 &= \rho \sin\theta_{p-1}\dots\dots\sin\theta_3\sin\theta_2\sin\theta_1.
\end{aligned}$$

On en déduit

$$x_1^2+\dots+x_p^2=\rho^2, \qquad J=f(\theta_1,\dots,\theta_{p-1})\rho^{p-1},$$

en désignant par J le jacobien qu'introduit le changement de variable. Par suite, l'intégrale de Cauchy, étendue au champ compris entre deux sphères de rayon r et R

$$\int\int\dots\int_r^R f(\theta_1,\dots,\theta_p)\frac{d\theta_1\dots d\theta_{p-1}\,d\rho}{\rho^{2\alpha-p+1}},$$

se comporte, R croissant indéfiniment, comme l'intégrale

$$\int^R \frac{d\rho}{\rho^{2\alpha-p+1}}.$$

Elle a un sens pour $2\alpha > p$; elle diverge pour $2\alpha \leqq p$.

En raisonnant comme au n° 132, on en déduit que la série

$$\sum{}' \frac{1}{[\varphi(\mu_1,\dots,\mu_p)]^\alpha} \qquad \left(\begin{array}{c}\mu_1,\dots,\mu_p=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \dots\\ \mu_1=\dots=\mu_p=0 \text{ exclus}\end{array}\right)$$

où φ désigne une forme quadratique définie toujours positive, converge si 2α surpasse p (*voir* Picard, *Analyse*, t. I, 2e édit., p. 292).

134. *Plus généralement, soit φ une fonction continue homogène de degré 2α des indices $\mu_1,\dots,\mu_p$, ne s'annulant qu'au point $\mu_1=\dots\mu_p=0$; et ψ une fonction des mêmes indices, de degré* inférieur *à 2α. La série*

$$\sum{}' \frac{1}{\varphi+\psi} \qquad \left(\begin{array}{c}\text{les termes pour lesquels } \varphi+\psi\\ \text{serait nul sont exclus}\end{array}\right)$$

est convergente si 2α surpasse p.

En effet, regardons $\mu_1, \ldots, \mu_p$ comme des variables et donnons-leur tous les systèmes de valeurs réelles satisfaisant à l'égalité $\sum \mu_i^2 = 1$. (La courbe correspondante remplace l'ellipse considérée p. 208.) Pour ces valeurs, la fonction φ, dont le signe est constant (car φ ne pourrait changer de signe qu'en s'annulant) et qui demeure finie, reste comprise entre deux nombres fixes; il en sera de même du rapport $\varphi : \left(\sum \mu_i^2\right)^\alpha$ pour les valeurs des μ considérées, et dès lors pour *toutes* les valeurs des μ, puisque ce rapport est une fonction homogène de degré zéro des variables μ.

D'autre part, dès qu'une variable μ augmente indéfiniment, le rapport $\psi : \left(\sum \mu_i^2\right)^\alpha$ tend vers zéro, à cause du degré de ψ. Donc le rapport $(\varphi + \psi) : \left(\sum \mu_i^2\right)^\alpha$ demeure, à partir de valeurs suffisamment grandes des μ, compris entre deux nombres fixes, et les séries

$$\sum{}' \frac{1}{\varphi + \psi}, \quad \sum{}' \frac{1}{(\mu_1^2 + \ldots + \mu_p^2)^\alpha},$$

sont convergentes ou divergentes en même temps. Donc la première converge pour $2\alpha > p$, et diverge pour $2\alpha \leqq p$ (¹).

§ II. — Séries entières a plusieurs variables.

Les théorèmes qui précèdent sur les séries multiples conduisent à de nouvelles propriétés des séries entières à une variable; en les appliquant ensuite aux séries entières à plusieurs variables, nous généraliserons plusieurs propositions établies dans le cas d'une variable.

135. Soient z, $z + h$ deux points du domaine de convergence d'une série entière $\mathfrak{P}(z)$; R son rayon de convergence. Posons $|z| = \zeta$, $|h| = \eta$, $|a_n| = \alpha_n$. *Nous allons ordonner la série*

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{P}(z+h) = a_0 + a_1(z+h) + \ldots \\ + a_n(z^n + n z^{n-1} h + \ldots + h^n) + \ldots, \end{aligned} \right.$$

(¹) Ce théorème est dû à M. Jordan. Cf. *Analyse*, 2ᵉ édition, t. I, p. 304.

suivant les puissances de h, et montrer que la série obtenue

$$(2)\qquad \begin{cases} \mathfrak{P}_1(h) = (a_0 + a_1 z + \ldots) + (a_1 + 2a_2 z + \ldots) h \\ \qquad + (2a_2 + 2.3 a_3 z + \ldots) \dfrac{h^2}{1.2} + \ldots \end{cases}$$

est convergente dans le domaine $\zeta + \eta < \mathrm{R}$, et a même somme que la série $\mathfrak{P}(z+h)$.

Considérons le Tableau t

$$\begin{array}{cccccc} a_0, & a_1 z, & a_2 z^2, & \ldots, & a_n z^n, & \ldots, \\ & 1 a_1 h, & 2 a_2 h z, & \ldots. & n a_n h z^{n-1}, & \ldots, \\ & & a_2 h^2, & \ldots, & \dfrac{n(n-1)}{1.2} a_n h^2 z^{n-2}, & \ldots. \\ & & & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots. \end{array}$$

Il converge absolument, car le Tableau τ formé par les modules des éléments du Tableau t a pour somme, quand on additionne les termes de chaque colonne puis les colonnes entre elles, la série de terme général $\alpha_n(\zeta + \eta)^n$, convergente par hypothèse. Dès lors, si l'on fait la somme des termes de chaque colonne du Tableau t, puis la somme des colonnes, ce qui donne la série $\mathfrak{P}(z+h)$, le résultat est le même qu'en additionnant les termes de chaque ligne et en additionnant les sommes trouvées, ce qui donne la série $\mathfrak{P}_1(h)$ (p. 202).

Corollaire. — Soient $\mathfrak{P}'(z)$, $\mathfrak{P}''(z)$, ... les dérivées de la série donnée. On a (p. 139)

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}'(z) &= a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \ldots + n a_n z^{n-1} + \ldots, \\ \mathfrak{P}''(z) &= 2a_2 + 2.3.a_3 z + \ldots + n(n-1) a_n z^{n-2} + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Dès lors, en égalant les développements (1) et (2), on obtient la *formule de Taylor*

$$(3)\qquad \mathfrak{P}(z+h) = \mathfrak{P}(z) + \frac{h}{1}\mathfrak{P}'(z) + \ldots + \frac{h^n}{n!}\mathfrak{P}^n(z) + \ldots,$$

à laquelle la substitution $(z, z+h; a, z)$ donne la forme

$$\mathfrak{P}(z) = \mathfrak{P}(a) + \frac{z-a}{1}\mathfrak{P}'(a) + \ldots + \frac{(z-a)^n}{n!}\mathfrak{P}^n(a) + \ldots.$$

Cette relation met en évidence la *possibilité de substituer à la*

représentation analytique d'une fonction par une série entière $\mathfrak{P}(z)$ *une infinité d'autres séries de puissances* $\mathfrak{P}(z-a)$: il suffit que les points a et z appartiennent au domaine de convergence de $\mathfrak{P}(z)$. Cette infinité n'est pas dénombrable, puisque a est arbitraire dans le cercle R [1].

136. De là ce théorème :

Deux séries de puissances $\mathfrak{P}(z-a)$, $\mathfrak{P}(z-b)$, *dont les cercles de convergence ont une région commune* $\mathfrak{D}$, *coïncident dans toute cette région, si elles ont même valeur sur un arc continu de courbe passant par un point* c *de* $\mathfrak{D}$ (ou simplement sur un ensemble infini ayant le point c pour point limite).

En effet, joignons le point c à un point arbitraire l de $\mathfrak{D}$ par un arc de courbe γ intérieur à $\mathfrak{D}$: il est toujours possible de choisir γ de façon que la plus courte distance ρ d'un point quelconque de γ aux circonférences des deux cercles de convergence ne soit pas nulle.

Aux séries $\mathfrak{P}(z-a)$, $\mathfrak{P}(z-b)$ on peut respectivement substituer des séries $\mathfrak{P}(z|a, c)$, $\mathfrak{P}(z|b, c)$ qui procèdent suivant les puissances de $z-c$, et coïncident avec les premières séries au moins dans le cercle de rayon ρ décrit de c. Dès lors, en vertu de

---

[1] 1° Cette formule conduit à une démonstration *directe* de la continuité des séries entières (p. 133). Reprenons l'égalité (3)

$$\mathfrak{P}(z+h)-\mathfrak{P}(z)=\frac{h}{1}\mathfrak{P}'(z)+\ldots+\frac{h^n}{n!}\mathfrak{P}^n(z)+\ldots.$$

Le second membre, série entière en h, peut descendre au-dessous de tout nombre donné, dans tout le cercle de convergence; donc $\mathfrak{P}(z)$ est continue dans ce cercle.

2° Elle donne aussi une démonstration directe du théorème sur la dérivation des séries entières (p. 138). Il suffit d'écrire la formule (3) sous la forme

$$\frac{\mathfrak{P}(z+h)-\mathfrak{P}(z)}{h}=\mathfrak{P}'(z)+\frac{h}{1.2}\mathfrak{P}''(z)+\ldots. \tag{4}$$

La série que nous avons appelée dans le texte $\mathfrak{P}'(z)$ est bien la dérivée de $\mathfrak{P}(z)$, puisque le second membre de l'égalité (4), série entière et dès lors fonction continue de h pour $h=0$, tend vers $\mathfrak{P}'(z)$ quand h tend vers 0.

l'hypothèse, les deux dernières séries coïncident le long d'un arc de courbe passant par c; il en sera de même (p. 141) dans tout le cercle de centre c et de rayon ρ.

Donc, dans ce cercle, les séries $\mathfrak{P}(z-a)$, $\mathfrak{P}(z-b)$ ont aussi même valeur.

En prenant sur la ligne γ, entre c et l, un point d intérieur au cercle de rayon ρ décrit de c, on verra que les séries coïncident dans un nouveau cercle décrit de d; et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on parvienne en l ([1]).

137. Arrivons aux théorèmes concernant les séries multiples : pour simplifier les notations, nous prendrons seulement deux variables.

Théorème I. (Théorème d'Abel généralisé.) — *Si une série entière a, pour un système de valeurs* (z_0, u_0) *des variables, les modules de ses éléments inférieurs à un nombre positif fixe* L *à partir de certaines valeurs des indices, cette série est convergente dans le champ double formé par deux cercles* C *et* Γ, *décrits de l'origine avec les rayons* $|z_0| = r_0$ *et* $|u_0| = \rho_0$.

Soit $a_{mn} z^m u^n$ le terme général de la série; considérons le

---

([1]) Le même raisonnement montre que deux fonctions, holomorphes respectivement dans deux domaines $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}'$ ayant en commun une région δ d'un *seul tenant*, coïncident dans tout le domaine δ et dès lors se *continuent* l'une l'autre (Chap. V) si elles ont même valeur sur un arc continu de courbe intérieur à δ (ou encore si elles ont même valeur ainsi que leurs dérivées en un point intérieur à δ).

Dès lors une fonction holomorphe ne peut être nulle ou plus généralement constante sur un arc continu de courbe, ou plus généralement sur un ensemble infini contenu dans un domaine fini, puisqu'un pareil ensemble a un point limite intérieur au domaine (*voir* aussi n° 228). C'est sur ce dernier théorème, dont le principe se trouve dans les *Œuvres de Gauss* (t. V, p. 223) et que Riemann a formulé (*Œuvres*, trad., p. 33), que repose le prolongement *analytique*.

Comparons les fonctions algébriques et les fonctions holomorphes. Une équation algébrique de degré n ayant plus de n racines est une identité; par suite, si l'on se donne les valeurs d'une fonction algébrique pour une infinité de valeurs de la variable, cette fonction est entièrement déterminée. *Il y a dépendance entre les diverses parties d'une courbe algébrique.* Quant à la fonction holomorphe, si elle peut avoir une infinité de zéros, elle ne peut en avoir une infinité continue : *il y a donc aussi une sorte de solidarité entre les valeurs de la fonction dans les diverses parties de son domaine d'existence.*

Tableau t

$$\begin{array}{llllll} a_{00}, & a_{10}z, & a_{20}z^2, & \ldots, & a_{m0}z^m, & \ldots, \\ a_{01}u, & a_{11}zu, & a_{21}z^2u, & \ldots, & a_{m1}z^m u, & \ldots, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ a_{0n}u^n, & a_{1n}zu^n, & a_{2n}z^2u^n, & \ldots, & a_{mn}z^m u^n, & \ldots, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \end{array}$$

et le Tableau τ formé par les modules de ces éléments. Par hypothèse, quand m et n surpassent des nombres fixes, on a

$$|a_{mn}z_0^m u_0^n| < \mathrm{L}, \qquad |a_{mn}| < \frac{\mathrm{L}}{r_0^m \rho_0^n}.$$

Soient r et ρ des nombres arbitraires inférieurs à r_0 et à ρ_0. Dans le Tableau t, en tout point (z, u) tel que

$$|z| \leqq r < r_0, \qquad |u| \leqq \rho < \rho_0,$$

le module du terme général est inférieur à $\mathrm{L}\left(\frac{r}{r_0}\right)^m\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n$. Dès lors, dans le Tableau τ, la somme des éléments d'une colonne n'atteint pas (ou peut être regardée comme n'atteignant pas)

$$\mathrm{L}\left(\frac{r}{r_0}\right)^m \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n = \mathrm{L}\left(\frac{r}{r_0}\right)^m \frac{1}{1-\frac{\rho}{\rho_0}},$$

et la somme des colonnes est inférieure au nombre fixe

$$\mathrm{L}\frac{1}{\left(1-\frac{r}{r_0}\right)\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)}.$$

Le Tableau τ est donc convergent, et le Tableau t absolument convergent.

La série converge, absolument et uniformément, dans le champ double formé par deux cercles de rayons inférieurs à r_0 et ρ_0, et sur leurs circonférences.

En particulier, si une série entière converge en un point (z_0, u_0), elle converge absolument et uniformément dans le champ dont on vient de parler.

Corollaires :

I. Ce théorème prouve l'existence de *rayons de convergence*

associés en nombre infini, c'est-à-dire d'une infinité de *couples* de nombres tels que la série converge dans l'ensemble $|z| < R$, $|u| < \mathfrak{R}$, et diverge à son extérieur (*voir* n° 143) ([1]).

II. On peut disposer dans l'ordre que l'on veut les termes d'une série entière convergente, par exemple l'ordonner par rapport à l'une des variables : les coefficients des puissances de cette variable seront des séries entières par rapport aux autres variables, convergentes dans le domaine considéré.

III. Relativement à une série entière convergente $\varphi(z, u, \ldots)$, une série entière $\psi(z, u, \ldots)$ est dite *majorante*, lorsque ses coefficients sont réels, positifs et supérieurs ou égaux aux modules des coefficients correspondants de la série φ.

Les fonctions $\dfrac{M}{\left(1-\dfrac{z}{r}\right)\left(1-\dfrac{u}{\rho}\right)}$, $\dfrac{M}{1-\dfrac{z}{r}-\dfrac{u}{\rho}}$ (M désignant le module maximum du terme général de la série entière) employées par Briot et Bouquet et par Weierstrass conduisent à des séries majorantes relativement à la série $\sum a_{mn} z^m u^n$ ([2]).

138. Théorème II. — *Une série entière, convergente dans*

([1]) Ainsi, comme pour les séries simples, la convergence dépend des *modules* des variables.

Le théorème d'Abel n'a plus d'analogue pour les séries entières ayant comme éléments des polynomes homogènes par rapport à plusieurs variables *réelles* : de la convergence d'une pareille série en un point (x_0, y_0), on ne peut déduire sa convergence dans l'ensemble $|x| < |x_0|$, $|y| < |y_0|$, au moins si les modules des termes $a_i x^i y^{n-i}$ ne restent pas, au point (x_0, y_0), inférieurs à un nombre fixe (n° 310).

([2]) Pour indiquer qu'une série ψ est majorante relativement à φ, on écrit

$$\varphi(z, u) \ll \psi(z, u). \tag{1}$$

Plusieurs des règles ordinaires du calcul s'appliquent aux séries majorantes.

Ainsi, des inégalités du type (1) étant données, on peut additionner et multiplier des inégalités de même sens; on y peut remplacer les variables au premier membre par des séries s et au second membre par des séries majorantes relativement à s; on peut les différentier par rapport à l'une des variables, ou les intégrer par rapport à l'une des variables en prenant 0 comme limite inférieure d'intégration (Poincaré, *Méthodes de la Mécanique céleste*, t. I, p. 48).

Les fonctions majorantes de Weierstrass jouent le même rôle que celles de Cauchy; mais elles sont d'un maniement plus commode.

un champ double (C, Γ) *donne naissance par dérivation à une infinité de séries entières convergentes dans le même champ.*

En effet, de la série convergente

$$\mathfrak{P}(z, u) = \sum a_{mn} z^m u^n \qquad (|z| < r_0;\ |u| < \rho_0),$$

déduisons, par exemple, la série

$$\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial z} = \sum a_{mn} m z^{m-1} u^n.$$

Elle converge et a au moins même champ de convergence que la série $\mathfrak{P}$, car le Tableau formé par les modules de ses éléments a une somme qui ne dépasse pas (L ayant le même sens que précédemment)

$$\sum \mathrm{L}\, m \frac{r^{m-1} \rho^n}{r_0^m \rho_0^n},$$

et cette dernière série converge, comme étant le produit des séries convergentes

$$\sum \frac{\mathrm{L}\, m r^{m-1}}{r_0^m}, \quad \sum \frac{\rho^n}{\rho_0^n} \qquad (r < r_0;\ \rho < \rho_0).$$

Du reste, la série formée est bien la dérivée par rapport à z de la série $\mathfrak{P}$, comme on le voit, en ordonnant par rapport à z cette série multiple et en appliquant à la série simple formée la règle donnée page 139.

Ceci est vrai quels que soient le nombre des variables et l'ordre des dérivées considéré.

139. Nous avons traité (p. 211) un cas particulier de ce problème : soit S une série ayant pour éléments U_m des séries entières convergentes, elle-même convergente dans le voisinage de l'origine ; posons

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{S} = \mathrm{U}_0 + \mathrm{U}_1 + \ldots + \mathrm{U}_m + \ldots \\ \mathrm{U}_m = a_{m0} + a_{m1} z + \ldots + a_{mn} z^n + \ldots \end{array}\right\} \quad (m = 0, 1, \ldots),$$

et formons le Tableau

$$(t) \qquad \left\{\begin{array}{llllll} a_{00}, & a_{01} z, & a_{02} z^2, & \ldots, & a_{0n} z^n, & \ldots, \\ a_{10}, & a_{11} z, & a_{12} z^2, & \ldots, & a_{1n} z^n, & \ldots, \\ a_{20}, & a_{21} z, & a_{22} z^2, & \ldots, & a_{2n} z^n, & \ldots, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \end{array}\right.$$

La somme des éléments par colonnes et par lignes est-elle la même ?

Quand le Tableau converge absolument, les théorèmes de Cauchy (p. 202) résolvent immédiatement la question [1]. Qu'arrive-t-il dans les autres cas ; et même, lorsque le Tableau converge absolument dans un domaine, la sommation par colonnes n'est-elle pas légitime dans une région plus étendue ? En d'autres termes, à quelles conditions : 1° la série S est-elle développable en série entière ; 2° les colonnes du Tableau sont-elles convergentes ; 3° leurs sommes donnent-elles les termes du développement ?

---

(1) *Cf.* CAUCHY, *Œuvres*, 2e série, t. X, p. 77. Les Tableaux absolument convergents se rencontrent fréquemment.

Exemple. — Soit la série de terme général

$$U_n = e^{-n^2} e^{nz} = e^{-n^2}\left(1 + \frac{nz}{1} + \ldots + \frac{n^p z^p}{p!} + \ldots\right).$$

Chaque série U_n converge absolument dans tout le plan, ainsi que la somme des séries formées avec les modules des termes des éléments de U_n (car la racine $n^{\text{ième}}$ du terme de rang n tend vers zéro pour n infini). On peut donc, quel que soit z, remplacer la série donnée par une série entière obtenue par le procédé indiqué.

De même, les séries ($|z| < 1$)

$$\frac{z}{1-z} + \frac{z^3}{1-z^3} + \frac{z^5}{1-z^5} + \ldots, \quad \frac{z}{1-z^2} + \frac{z^2}{1-z^4} + \frac{z^3}{1-z^6} + \ldots$$

ont la même somme, comme représentant un même Tableau absolument convergent évalué par colonnes et par lignes.

Au contraire, soit la série

$$S = 1 + \frac{z-1}{3-z} + \left(\frac{z-1}{3-z}\right)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2}z + \frac{2}{3^3}z^2 + \ldots\right)^n.$$

Chaque série U_n converge pour $|z| < 3$, et la série S converge uniformément pour $\left|\frac{z-1}{3-z}\right| \leqq k < 1$, c'est-à-dire pour les valeurs de z dont la partie réelle est inférieure à 2. Aussi le théorème de Weierstrass permet le développement en série entière au moins dans tout le cercle $|z| = 2$, tandis que les théorèmes de Cauchy n'assureraient la convergence du Tableau que pour les valeurs $|z| < \frac{3}{2}$.

Cf. aussi PRINGSHEIM, *M. A.*, t. XLII, p. 159.

Weierstrass a donné une condition *suffisante* pour qu'il en soit ainsi ([1]).

Théorème III. — *Lorsque chaque série* U_m *converge dans un cercle décrit de l'origine, et que la série* S *converge uniformément sur toute circonférence intérieure à ce cercle, la valeur de la série* S *à l'intérieur du premier cercle s'obtient en faisant par colonnes la sommation des éléments du Tableau.*

Lemme. — Une limite supérieure des modules des coefficients des termes d'une série entière $\sum a_n z^n$ est donnée par l'inégalité

$$|a_n| \leqq N r^{-n},$$

où N désigne le module maximum de cette série sur la circonférence d'un cercle de rayon r, concentrique au cercle de convergence et de rayon moindre ([2]).

1° Traitons d'abord la question pour une expression $\varphi(z)$ d'un nombre *limité* de termes

$$\varphi(z) = a_0 + a z^m + a_1 z^{m_1} + \ldots,$$

([1]) Au n° 234, cet *important* théorème sera établi par les procédés plus rapides de Cauchy; il suffirait de rapprocher les propositions des n°s 177 et 233, si l'on voulait seulement prouver la possibilité du développement de S en série entière.

La démonstration de Weierstrass se trouve dans son Mémoire : *Zur Functionenlehre* (*Œuvres*, t. II, p. 201; trad. *B. D.*, 1881, p. 157). *Cf.* aussi Tannery et Molk, *Éléments, etc.*, t. I, p. 55.

De même, une série ayant pour éléments des séries entières

$$\sum a_{\nu_1} \ldots a_{\nu_\rho} z_1^{\nu_1} \ldots z_\rho^{\nu_\rho},$$

si elle converge absolument et uniformément, ainsi que ses éléments, dans le voisinage du point (0, ..., 0), peut être remplacée par une série entière multiple obtenue en mettant à la suite les uns des autres les termes de même degré appartenant aux diverses séries entières $\sum$ [Weierstrass, *Zur Theorie der Potenzreihen* (*Œuvres*, t. I, p. 71)].

Il y a un théorème analogue pour les produits infinis : un produit infini uniformément convergent dans un cercle, dont chaque terme est dans ce cercle développable en série entière, est lui-même dans le même cercle développable en série entière.

([2]) Ce lemme, dû à Cauchy, résulte immédiatement de la *considération d'intégrales* (n° 181) : dans la démonstration donnée ici, les *séries entières*

dans laquelle m, m_1, ..., sont des entiers arbitraires, positifs ou négatifs (non nuls) et étudions la moyenne de ses valeurs en des points de la circonférence de rayon r décrite de l'origine, dont nous ferons croître le nombre p indéfiniment. On peut déterminer une quantité ω, ayant pour module l'unité, telle que ses puissances ω^m, ω^{m_1}, ..., soient toutes différentes de 1, puisque le nombre des racines des équations

$$u^m = 1, \qquad u^{m_1} = 1, \qquad \ldots$$

n'atteint pas $|m| + |m_1| + \ldots$, et par suite est *fini*. ω étant ainsi choisi, les points de la circonférence r s'obtiendront en posant $z = r\omega^\lambda$, λ désignant un entier positif.

Considérons le terme az^m et la somme

$$\frac{1}{p}\sum_{\lambda=0}^{p-1} a(r\omega^\lambda)^m.$$

Quand p est fini, sa valeur est $\frac{ar^m}{p}\,\frac{\omega^{pm}-1}{\omega^m-1}$; elle tend vers zéro pour p infini puisque l'on a $|\omega^{pm}-1| \overline{\gtrless} 2$ et $\omega^m \gtrless 1$. En appliquant

---

interviennent seules. Servons-nous-en pour *préciser* le théorème démontré p. 140, que l'on peut énoncer ainsi :

Une série entière, qui n'est pas nulle à l'origine, ne s'annule pas dans son voisinage.

Appelons r un nombre positif inférieur au rayon de convergence de $\mathfrak{P}(z)$: N le module maximum de cette série sur cette circonférence r, et ζ le module d'un point z situé à son intérieur. La combinaison des inégalités

$$|a_1 z + a_2 z^2 + \ldots| \overline{\gtrless} |a_1|\zeta + |a_2|\zeta^2 + \ldots, \qquad |a_n| \overline{\gtrless} \mathrm{N} r^{-n}$$

donne

$$|\mathfrak{P}(z) - a_0| \overline{\gtrless} \mathrm{N}\left(\frac{\zeta}{r} + \frac{\zeta^2}{r^2} + \ldots\right).$$

La série ne s'annule pas tant que l'on a

$$|\mathfrak{P}(z) - a_0| < |a_0| \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{N}\frac{\zeta}{r-\zeta} < |a_0|,$$

ou

$$\zeta < \frac{|a_0| r}{\mathrm{N} + |a_0|}.$$

On peut donc *fixer le rayon d'un cercle* à l'intérieur duquel la série n'a pas de racine.

cette remarque à chacun des termes de $\varphi(z)$, on en conclut

$$\lim_{p=\infty}\left[\frac{1}{p}\sum_{\lambda=0}^{p-1}\varphi(r\omega^\lambda)\right] = a_0.$$

Le module de la moyenne des valeurs de la fonction $\varphi(z)$ sur la circonférence r ne peut dépasser le module maximum N de $\varphi(z)$ sur cette circonférence; on a donc

$$\left|\frac{1}{p}\sum_{\lambda=0}^{p-1}\varphi(r\omega^\lambda)\right| \leqq N,$$

et dès lors

$$|a_0| \leqq N.$$

2° Pour en déduire le lemme, écrivons

$$\begin{aligned} z^{-n}\mathfrak{P}(z) = (a_0 z^{-n} + \ldots + a_n + \ldots + a_{n+m} z^m) \\ + (a_{n+m+1} z^{m+1} + a_{n+m+2} z^{m+2} + \ldots). \end{aligned}$$

Le rayon de convergence de la série $\mathfrak{P}(z)$ surpasse r; aussi l'on peut choisir m assez grand pour que, dans la seconde parenthèse, la somme des termes ait un module inférieur à tout nombre donné, aux points $|z| = r$ (p. 114). La première parenthèse est de même type que $\varphi(z)$: soit N_1 son module maximum sur la circonférence r; on a

$$a_n \leqq N_1.$$

Comme N_1 n'est autre que $r^{-n}N$, on a bien le résultat annoncé.

140. Revenons au théorème. Soit R le rayon du cercle à l'intérieur duquel chaque série U converge, et r un nombre inférieur à R. Nous avons trois points à établir :

1° *Chaque série a_n ($a_n = a_{0n} + a_{1n} + \ldots$) est convergente.*

En effet, à cause de la convergence uniforme de la série $\sum U_q$ sur la circonférence r, à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un entier μ tel que l'on ait, pour $|z| = r$ et $m > \mu$,

$$\left|\sum_{q=m}^{m+p} U_q\right| < \varepsilon \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

Le premier membre de l'inégalité est le module de la somme d'un nombre *fini* de séries convergentes; on peut donc aussi, en groupant les termes par colonnes, l'écrire sous la forme

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}(a_{mn}+a_{m+1n}+\ldots+a_{m+pn})z^n\right| < \varepsilon.$$

Par suite ε représente une limite supérieure du module d'une série entière, sur la circonférence r; le lemme permet d'en conclure l'inégalité

$$|a_{mn}+a_{m+1n}+\ldots+a_{m+pn}| < \varepsilon r^{-n},$$

qui prouve la convergence de la série a_n.

2° *La série* $\sum a_n z^n$ *converge dans le cercle* R.

En effet, séparons chaque somme a_n en deux parties

$$a_n = (a_{0n}+a_{1n}+\ldots+a_{m-1n}) + (a_{mn}+a_{m+1n}+\ldots) = \sigma_{mn}+\rho_{mn}$$
$$(m > \mu).$$

De même en faisant par colonnes la somme des éléments du Tableau t (p. 217), divisons-la en deux groupes formés, le premier, par les m premières lignes, le second, par les lignes restantes, ce qui donne

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \begin{array}{l} \sigma_{m0}+\sigma_{m1}z+\ldots+\sigma_{mn}z^n+\ldots \\ +\rho_{m0}+\rho_{m1}z+\ldots+\rho_{mn}z^n+\ldots. \end{array}$$

Enfin, désignons par σ et ρ ces deux dernières séries. La série σ, somme d'un nombre fini de séries convergentes, est convergente dans le cercle R. En vertu de l'inégalité $|\rho_{mn}| \overline{\gtrless} \varepsilon r^{-n}$, qui se déduit de celle que l'on a écrite tout à l'heure, la convergence absolue de la série ρ, aux points $|z| < r$, résultera du premier théorème d'Abel.

Donc la somme $\sigma+\rho$ converge aux points $|z| < r$, et par suite dans l'ensemble $|z| < \mathrm{R}$.

3° *Dans le cercle* R, *les séries* S *et* $\sum a_n z^n$ *ont même valeur.*

En effet, prouver l'identité

$$\sum_{q=0}^{m-1} U_q + \sum_{q=m}^{\infty} U_q = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{mn} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{mn} z^n$$

revient à établir que l'expression

$$\delta = \left| \sum_{q=m}^{\infty} U_q - \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{mn} z^n \right| \qquad (m > \mu),$$

obtenue en laissant de côté des parties communes (les m premières lignes du Tableau) tend vers o. Or, on a, pour $|z| < r$:

$$\left| \sum_{q=m}^{\infty} U_q \right| < \varepsilon, \qquad \left| \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{mn} z^n \right| \leqq \sum_{n=0}^{\infty} |\rho_{mn} z^n| \leqq \frac{\varepsilon r}{r - |z|},$$

ce qui donne

$$\delta \leqq \varepsilon + \frac{\varepsilon r}{r - |z|}.$$

Le résultat énoncé est donc vrai en tout point intérieur au cercle de rayon r, et dès lors en tout point intérieur au cercle de rayon R.

Corollaires :

I. La série proposée a des dérivées de tous les ordres, qui s'obtiennent en additionnant les dérivées des éléments U et en ordonnant leur somme par rapport à z (*voir* aussi n° 233).

II. La substitution (z, z^{-1}) montre qu'une série, ayant pour éléments des séries entières en z^{-1} convergentes à l'extérieur d'un cercle C, et elle-même uniformément convergente à l'extérieur de C, peut être représentée à l'extérieur de C par une série entière en z^{-1} formée par le procédé indiqué.

Dès lors, soit S une série ayant pour éléments des séries procédant suivant les puissances positives et négatives de $z - a$, toutes convergentes au moins dans la couronne déterminée par deux cercles décrits de a : si, dans cette couronne, la série S converge uniformément, elle peut être ordonnée suivant les puissances positives et négatives de $z - a$.

141. Théorème IV. — *Lorsque, dans une série entière à p variables ayant un domaine de convergence, on substitue aux variables des séries entières par rapport à q variables nouvelles,* séries sans terme indépendant *et ayant aussi un domaine de convergence, on obtient une série convergente dans un certain champ.*

Pour simplifier les notations, prenons une série à deux variables $\mathfrak{P}(u, u')$, convergente dans le champ double (r, r'), et faisons-y la substitution

$$u = b_1 z + b_2 z^2 + \ldots,$$
$$u' = b'_1 z + b'_2 z^2 + \ldots,$$

ces séries étant convergentes dans un cercle de rayon ρ. A la série transformée correspond un Tableau t à triple entrée (les indices se rapportent aux coefficients a_{mn} de $\mathfrak{P}$ et aux exposants de z) qui est absolument convergent.

En effet, les hypothèses sur la convergence des trois séries donnent

$$|a_{mn}| < \frac{\mathfrak{L}}{r^m r'^n}, \qquad |b_p| < \frac{L}{\rho^p}, \qquad |b'_p| < \frac{L}{\rho^p},$$

$\mathfrak{L}$ et L étant des grandeurs fixes. Introduisons les séries auxiliaires

$$\mathfrak{Q}(u_1, u'_1) = \sum_{mn} \mathfrak{L}\left(\frac{u_1}{r}\right)^m \left(\frac{u'_1}{r'}\right)^n, \qquad u_1 = u'_1 = L\sum_p \left(\frac{z}{\rho}\right)^p.$$

Elles sont respectivement majorantes pour les trois séries données, et permettent de former un Tableau t_1 à triple entrée, ayant pour éléments les termes correspondant à ceux du Tableau t; il suffit d'en établir la convergence absolue.

Or la série qui représente u_1 et u'_1 ayant pour somme

$$L\frac{z}{\rho}\left(1 - \frac{z}{\rho}\right)^{-1},$$

on peut écrire

$$\mathfrak{Q}(u_1, u'_1) = \sum_{mn} \mathfrak{L} \frac{\left(\frac{L}{r}\right)^m \left(\frac{L}{r'}\right)^n \left(\frac{z}{\rho}\right)^{m+n}}{\left(1 - \frac{z}{\rho}\right)^{m+n}}.$$

Cette série est, à un facteur près, le produit des progressions

$$\sum_m \left(\frac{L}{r}\right)^m \frac{\left(\frac{z}{\rho}\right)^m}{\left(1-\frac{z}{\rho}\right)^m}, \quad \sum_n \left(\frac{L}{r'}\right)^n \frac{\left(\frac{z}{\rho}\right)^n}{\left(1-\frac{z}{\rho}\right)^n}$$

qui convergent, si leurs raisons n'atteignent pas l'unité, c'est-à-dire si $|z|$ est inférieur à la plus petite des quantités

$$\frac{\rho r}{r+L}, \quad \frac{\rho r'}{r'+L}.$$

On connaît donc le rayon d'un cercle à l'intérieur duquel on est assuré de la convergence de la série $\mathfrak{Q}$, de celle des Tableaux t_1 et t, et enfin de celle de la série $\mathfrak{P}$ transformée [1].

142. Lorsque dans une série entière

$$S = a_0 + a_1 u + \ldots$$

convergente pour $|u| < r$, on remplace la variable u par une série entière

$$u = b_0 + b_1 z + \ldots = \mathfrak{P}(z),$$

convergente pour $|z| < \rho$, *qui renferme un terme indépendant,* peut-on encore ordonner le résultat par rapport à z?

Pour cela, *il faut* évidemment que la série S transformée converge dans le voisinage de $z = 0$. Or, pour ces valeurs, u tend vers b_0. Le point b_0 doit donc être à l'intérieur du cercle de convergence de la série S.

Cette condition est suffisante. En effet, si elle est remplie, la continuité de la série u permet de trouver un nombre ρ_1, inférieur à ρ, tel que, aux points $|z| < \rho_1$, on ait $|u| < r - \varepsilon$, ε étant un nombre *positif* suffisamment petit. Dans ce cercle de rayon ρ_1,

---

(1) En résumé, les propriétés des polynomes qui n'impliquent pas la notion de degré s'étendent aux séries entières : on peut les additionner, les multiplier, les élever à des puissances entières positives (p. 136), les ordonner par rapport aux puissances de $z - a$ (p. 212), y substituer à la variable une série entière relativement à une autre variable (p. 224) en les traitant comme des sommes d'un nombre limité de termes.

Nous verrons (n° 302) comment se pose la question de la divisibilité.

la série $\sum a_n \mathfrak{P}(z)^n$ a les modules de ses termes inférieurs à ceux de la série numérique $\sum |a_n|(r-\varepsilon)^n$, et, par suite, elle converge uniformément. On peut donc lui appliquer le théorème de Weierstrass (p. 219) et l'ordonner par rapport à z dans le domaine $|z| < \rho_1$ (¹).

143. Pour terminer, étendons aux séries multiples le théorème de Cauchy-Hadamard (p. 136) et étudions les relations entre *les rayons de convergence associés* d'une série entière à plusieurs indices. D'une manière plus précise, soit $a_{pq}z^p u^q$ le terme général d'une série entière à deux indices (dans tout ce qui suivra, nous appellerons n leur somme $p+q$); cherchons les valeurs des rayons associés R et $\mathcal{R}$, qui présentent *un rapport positif donné* k^{-1} (²).

Introduisons la *limite supérieure pour n infini* d'une suite de quantités réelles α_{pq} à deux indices : c'est une quantité L telle que l'on ait, si petit que soit un nombre arbitraire ε

$$L - \varepsilon < \alpha_{pq} < L + \varepsilon \qquad (p + q = n),$$

la première inégalité étant satisfaite pour une infinité de valeurs de n supérieures à une valeur N, la seconde pour toutes les valeurs de n supérieures à N (³).

(¹) Il y a même un domaine de l'origine où le Tableau t

$$\begin{matrix} a_0, & a_1 b_0, & a_2 b_0^2, & \ldots, & a_n b_0^n, & \ldots, \\ & a_1 b_1 z, & 2 a_2 b_0 b_1 z, & \ldots, & n a_n b_0^{n-1} b_1 z, & \ldots, \\ & a_1 b_2 z^2, & a_2(b_1^2 + 2 b_0 b_2) z^2, & \ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, \\ & \ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, \end{matrix}$$

converge absolument (ce qui dispense dans ce domaine d'invoquer le théorème de Weierstrass). On établit cette convergence absolue par comparaison avec celle d'un autre Tableau, majorant par rapport à t. Du reste, suivant que l'on fait la somme du Tableau t par colonnes ou par lignes, on obtient la série à transformer et cette série sous la forme demandée.

(²) LEMAIRE, *B. D.*, 1896. — *Cf.* aussi BIERMANN, *M. A.*, t. XLVIII.

(³) Dans d'autres questions, on considère la limite supérieure pour p et q infinis, c'est-à-dire pour p et q *chacun* supérieur à N; ici l'on suppose seulement $p + q > N$.

Appliquons cette notion à l'ensemble $\sqrt[n]{|a_{pq}|k^q}$, et désignons par $L(k)$ ou L sa limite supérieure pour n infini.

THÉORÈME. — *Quel que soit k, les nombres*

$$R = \frac{1}{L(k)}, \qquad \mathfrak{R} = \frac{k}{L(k)}$$

forment un système de rayons de convergence associés.

En effet, de l'inégalité

$$\sqrt[n]{|a_{pq}k^q|} < L + \varepsilon \qquad (\text{pour } n > N),$$

on déduit

$$|a_{pq}|\left(\frac{1}{L+\varepsilon}\right)^p\left(\frac{k}{L+\varepsilon}\right)^q < 1,$$

ce qui prouve la convergence absolue de la série dans l'ensemble

$$|z| < \frac{1}{L+\varepsilon}, \qquad |u| < \frac{k}{L+\varepsilon}.$$

On a de même, pour des valeurs de n supérieures à tout nombre donné,

$$\sqrt[n]{|a_{pq}k^q|} > L - \varepsilon,$$

ce qui prouve, en renversant les inégalités précédentes, que le terme général de la série ne tend pas vers zéro dans l'ensemble

$$|z| > \frac{1}{L-\varepsilon}, \qquad |u| > \frac{k}{L-\varepsilon}.$$

On en déduit le résultat énoncé, puisque ε est aussi petit que l'on veut.

Remarques :

I. L'élimination du paramètre k donne comme relation entre les valeurs de deux rayons associés

$$R\,L\left(\frac{\mathfrak{R}}{R}\right) = 1.$$

II. Pour que la série entière converge quels que soient z et u,

il faut et il suffit que l'on ait

$$\limsup_{n=\infty} |\sqrt[n]{a_{pq}}| = 0.$$

III. Il y a doute relativement à la convergence de la série, quand l'un des points z, u vient sur la circonférence de l'un des cercles R, $\mathfrak{R}$.

Il peut arriver qu'à une valeur de R correspondent une infinité de valeurs de $\mathfrak{R}$. Par exemple, en prenant ($R = 1$, $\mathfrak{R} < 2$) ou bien ($R < 1$, $\mathfrak{R} = 2$), on a des rayons associés pour la série entière qui correspond à la fonction $\frac{1}{(1-z)(2-u)}$.

§ III. — Produits infinis multiples.

Au lieu d'additionner les éléments d'une suite infinie, on peut les multiplier entre eux; aussi à la question des séries doit succéder celle des produits infinis multiples. Nous considérerons seulement les produits *absolument convergents*.

Soit donc une suite infinie d'éléments à double indice u_{ik}; on peut, d'une infinité de manières, les ranger en suites linéaires. Prenons l'une d'elles; appelons v_n son terme général.

Le produit doublement infini des facteurs $1 + u_{ik}$ *converge absolument lorsque la série de terme général* v_n *est absolument convergente :* la valeur du produit simple correspondant donne celle du produit double.

Cette définition est indépendante de l'ordre de rangement des éléments u. En effet, la convergence absolue d'une série v_n entraîne celle de toute autre série obtenue par un rangement quelconque des éléments v_n. A la nouvelle série correspond un nouveau produit, qui est convergent et a même valeur que le premier (on l'établirait comme au n° 81).

Réciproquement, si en disposant dans un certain ordre les facteurs d'un produit double on obtient un produit simple absolument convergent, la série correspondante converge absolument; donc le produit double converge et a une valeur indépendante de l'ordre de ses facteurs.

Il est permis de changer l'ordre des termes de la série v_n et l'ordre des facteurs du produit correspondant. Aussi, dans un

produit absolument convergent, on peut modifier l'ordre des facteurs, sans même s'astreindre à utiliser tous les facteurs à distance finie avant ceux dont l'indice est infiniment grand (p. 117) : le produit reste convergent et sa valeur ne change pas ([1]).

Par exemple, si les termes du produit infini sont rangés en Tableau, on peut, sans changer la valeur du produit, grouper d'abord les facteurs correspondant aux termes de chaque ligne, puis faire le produit des lignes.

SECTION II.

APPLICATION AUX TRANSCENDANTES D'ORDRE SUPÉRIEUR.

Comme exemples de transcendantes analytiques définies par des produits ou des séries multiples, introduisons les fonctions σ, ζ, $\wp$ de Wéierstrass, et les fonctions thêta à un ou plusieurs arguments. Elles servent d'*élément simple* pour la représentation des fonctions méromorphes à un argument (ou à p arguments) ayant deux périodes (ou $2p$ périodes) ([2]); aussi nous dirons un mot de la périodicité.

([1]) S'il y a des facteurs nuls, on les met à part, comme on l'a dit.

([2]) C'est en généralisant les fonctions circulaires inverses (arc sin x, arc tang x) considérées comme définies par des intégrales qu'Euler fut conduit aux fonctions elliptiques : « Par une combinaison qu'on peut regarder comme fort heureuse. quoique ces hasards n'arrivent qu'à ceux qui savent les faire naître » (Legendre), il établit la relation capitale dite *formule d'addition*.

La *périodicité* de ces fonctions fut découverte simultanément (1827) par Abel, à Christiania (*J. de Crelle,* t. 2) et Jacobi, à Kœnigsberg (Abel avait vingt-cinq ans et Jacobi vingt-trois) : ils arrivèrent directement, et non plus seulement par l'inversion d'intégrales, aux fonctions doublement périodiques (*voir* n° 153).

Quelque temps le nom de *fonction elliptique* fut réservé à *trois transcendantes* particulières introduites par ces géomètres (sn z, cn z, dn z). Il a paru naturel d'en étendre l'acception à toutes les fonctions jouissant des mêmes propriétés fondamentales; aujourd'hui on appelle *fonction elliptique* toute fonction méromorphe doublement périodique.

144. *Fonctions d'une variable.* — Une fonction qui admet la période ω admet la période $\mu\omega$, μ étant un entier arbitraire : elle prend la même valeur en une infinité de points en ligne droite équidistants. Une fonction qui aurait plusieurs périodes ω_1, $\omega_2, \ldots$, admettrait les périodes $\mu_1\omega_1 + \mu_2\omega_2 + \ldots$. Les périodes ω_1, $\omega_2, \ldots$ sont *distinctes* lorsque les périodes $\mu_1\omega_1 + \mu_2\omega_2 + \ldots$ sont toutes différentes [1].

Une fonction doublement périodique est celle qui admet deux

---

[1] Quand n périodes sont distinctes, *il est impossible de les exprimer en fonction de $n-1$ périodes par des relations linéaires à coefficients entiers,* et réciproquement.

Prouvons ce théorème dans le cas où $n = 2$, c'est-à-dire montrons que la condition nécessaire et suffisante pour que les périodes ω_1 et ω_2 soient distinctes est qu'il n'existe pas de période ω dont ω_1 et ω_2 soient des multiples entiers.

La condition est *nécessaire*. Car, si l'on avait $\omega_1 = \mu_1\omega$, $\omega_2 = \mu_2\omega$, on en déduirait $\mu_2\omega_1 = \mu_1\omega_2$.

La condition est *suffisante*. En effet, supposons que les périodes ne soient pas distinctes, c'est-à-dire que l'on ait une relation de la forme

$$\mu_1\omega_1 + \mu_2\omega_2 = \mu'_1\omega_1 + \mu'_2\omega_2,$$

ou, ce qui revient au même, du type

$$\nu_1\omega_1 + \nu_2\omega_2 = 0,$$

ν_1 et ν_2 étant des entiers que nous pouvons supposer positifs.

Procédons comme s'il s'agissait de rechercher le plus grand commun diviseur entre ν_1 et $\nu_2 (\nu_1 > \nu_2)$, ce qui conduit à écrire

$$\nu_1 = \nu_2 q + \nu_3 \qquad (\nu_2 > \nu_3),$$

et dès lors à mettre l'hypothèse sous la forme

$$\nu_2(q\omega_1 + \omega_2) + \nu_3\omega_1 = 0.$$

Posons $q\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$; ω_3 est une période, et la dernière égalité a la forme

$$\nu_2\omega_3 + \nu_3\omega_1 = 0.$$

On est donc dans les mêmes conditions qu'au point de départ, à cela près que l'entier ν_1 est remplacé par un entier moindre. Aussi, en divisant ν_2 par ν_3, et en poursuivant les opérations, on finira par obtenir une égalité

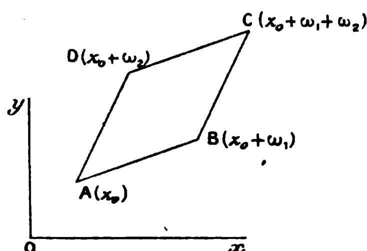
$$\omega_{n-1} + \nu_{n-1}\omega_n = 0,$$

qui montre que ω_{n-1}, et par suite $\omega_{n-2}, \ldots, \omega_2, \omega_1$ sont des multiples entiers de ω_n. Du reste, ω_n est une période; donc ω_1 et ω_2 sont des multiples entiers d'une période.

périodes distinctes ω_1, ω_2 [1]; elle reprend la même valeur en des points distribués aux sommets de parallélogrammes égaux.

On appelle *parallélogramme des périodes* (*fig.* 25) celui

Fig. 25.



dont les sommets ont pour affixes z_0, $z_0+\omega_1$, $z_0+\omega_1+\omega_2$, $z_0+\omega_2$, z_0 désignant un point arbitraire, par exemple l'origine; on considère comme appartenant à ce parallélogramme les points

$$z = z_0 + \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 \qquad (0 \leqq \lambda_1 < 1,\ 0 \leqq \lambda_2 < 1),$$

et, dans le plan, on regarde comme *homologues, équivalents* ou *congruents* les points z et $z+\mu_1\omega_1+\mu_2\omega_2$, μ_1 et μ_2 désignant des entiers arbitraires [2].

Associons *par couples* les périodes en nombre infini d'une

---

[1] Nous verrons qu'elles ne seraient pas distinctes, si leur rapport était *réel*. En même temps nous démontrerons ce théorème de Jacobi : une fonction analytique uniforme d'une variable ne peut admettre plus de deux périodes distinctes.

Dans les fonctions thêta, on suppose de plus le coefficient de i, dans le rapport $\frac{\omega_2}{\omega_1}$, *positif*. $\left(\text{Cette hypothèse ne restreint pas la généralité, puisque les parties réelles de } \frac{\omega_2}{i\,\omega_1} \text{ et de } \frac{\omega_1}{i\,\omega_2} \text{ sont de signes opposés.}\right)$ Désignons avec Weierstrass par $\mathcal{R}$ la partie réelle d'une grandeur complexe. C'est en vertu de l'hypothèse $\mathcal{R}\left(\frac{\omega_2}{i\,\omega_1}\right) \gtrless 0$ que le parallélogramme ABCD *existe*, et de l'hypothèse $\mathcal{R}\left(\frac{\omega_2}{i\,\omega_1}\right) > 0$ que l'angle BAD a la *disposition directe* (*fig.* 25).

[2] En arithmétique, deux nombres z et z' sont congrus, *modulis* α et β, si l'on a

$$z - z' = \mu\alpha + \mu'\beta.$$

On écrit

$$z \equiv z' \qquad (\mathrm{mod}\,\alpha,\ \beta).$$

fonction doublement périodique. Un couple est *primitif* lorsque toutes les périodes sont des fonctions linéaires à coefficients entiers des deux périodes de ce couple.

Soit (ω'_1, ω'_2) un couple de périodes déduit du couple (ω_1, ω_2) au moyen des relations

$$\begin{array}{l} \omega'_1 = p\,\omega_1 + q\,\omega_2 \\ \omega'_2 = r\,\omega_1 + s\,\omega_2 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{c} p,\ q,\ r,\ s \text{ entiers} \\ ps - qr = \mathrm{D} \end{array}\right).$$

Les deux couples sont *équivalents* lorsque le déterminant D a la valeur ± 1. En ce cas, les périodes déduites de chacun des couples, c'est-à-dire les périodes $\mu_1\omega_1 + \mu_2\omega_2$, $\mu'_1\omega'_1 + \mu'_2\omega'_2$ représentent la même suite de quantités [1].

A chaque couple de périodes correspond une division du plan en parallélogrammes, un *réseau* de parallélogrammes : pour deux couples équivalents, les sommets des deux réseaux coïncident.

Hermite a appelé *fonctions périodiques de deuxième* ou *troisième espèce* les fonctions méromorphes qui se reproduisent, multipliées par un facteur constant ou exponentiel, lorsqu'on ajoute à leur argument une constante ω : cette constante prend encore le nom de *période* [2]. Ces fonctions vérifient des relations de la forme

$$f(z+\omega) = \mathrm{C}\,f(z), \qquad f(z+\omega) = e^{az+b}\,f(z).$$

On les appelle aussi *fonctions à multiplicateurs constants, à multiplicateurs exponentiels* (Appell) : à ces dernières, Briot et Bouquet donnaient le nom de *fonctions intermédiaires*. Les fonctions périodiques ordinaires sont dites de *première espèce*.

145. *Fonctions de plusieurs variables.* — Soient p variables indépendantes $z_1, \ldots, z_p$, et pq constantes

$$\omega_{ik} \qquad (i = 1, \ldots, p;\ k = 1, \ldots, q),$$

---

(1) Les systèmes (ω_1, ω_2), (ω'_1, ω'_2) sont *proprement* ou *improprement* équivalents suivant que D a la valeur $+1$ ou la valeur -1. Quand il s'agira des fonctions thêta, on supposera toujours $\mathrm{D} = 1$, afin que dans les rapports $\frac{\omega_2}{\omega_1}$, $\frac{\omega'_2}{\omega'_1}$ le coefficient de i ait le *même signe*.

(2) Hermite, *Sur quelques applications des fonctions elliptiques*, 1885 (*C. R.*, 1860, 1861, etc.; *J. de Crelle*, t. 100). — Appell, *A. E. N.*, 1884, 1885, 1886, 1888.

disposées d'après leurs indices dans un Tableau t renfermant q lignes et p colonnes.

Une fonction admet comme système de périodes simultanées les éléments de la ligne de rang k, lorsqu'elle demeure invariable par la substitution

$$(z_1, \ldots, z_p;\ z_1 + \omega_{1k}, \ldots.\ z_p + \omega_{pk});$$

appelons-la S_k. Elle admet le Tableau t de périodes simultanées ω_{ik}, lorsqu'elle demeure invariable par toutes les substitutions

$$S_k \qquad (k = 1, \ldots, q).$$

Dans le Tableau t, multiplions les éléments de la ligne de rang k par un entier arbitraire μ_k; opérons de même pour chaque ligne, et ajoutons par colonnes les éléments du Tableau ainsi transformé. Si une fonction demeure invariable par les substitutions S_k, elle restera invariable par les substitutions

$$\left(z_1, \ldots, z_p;\ z_1 + \sum_{k=1}^{q} \mu_k \omega_{1k}, \ldots, z_p + \sum_{k=1}^{q} \mu_k \omega_{pk}\right).$$

De là une infinité de systèmes de périodes simultanées, puisque les entiers μ_k sont arbitraires.

Des systèmes de périodes simultanées sont dits *indépendants* ou *distincts*, lorsqu'ils ne peuvent être déduits par le procédé ci-dessus de systèmes de périodes simultanées en nombre moindre. *Une fonction à p arguments est $2p$ fois périodique, lorsqu'elle admet $2p$ systèmes de périodes indépendants* ([1]).

Pour une pareille fonction $q = 2p$, le Tableau des périodes renferme $2p^2$ éléments : nous aurons à rechercher à quelles conditions un Tableau est constitué par des systèmes indépendants, ou encore à quelles conditions un Tableau renfermant $2p^2$ éléments déduit d'un Tableau initial constitue un Tableau *équivalent* à ce Tableau.

146. On peut entendre par *fonctions circulaires* ou *trigo-*

([1]) Une fonction analytique uniforme de p arguments ne peut admettre plus de $2p$ systèmes de périodes indépendants.

nométriques les fonctions rationnelles du sinus et du cosinus : les *fonctions elliptiques,* ou fonctions méromorphes doublement périodiques, en sont la généralisation. Aussi il est commode de mettre en regard les premières propriétés de ces deux types de fonctions (les théorèmes seront justifiés plus tard).

FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES.	FONCTIONS ELLIPTIQUES.
1° *Éléments de réduction.*	1° *Éléments de réduction.*
Le *sinus :* il est défini par un produit infini simple. C'est une transcendante entière périodique.	La *fonction* σ : elle est définie par un produit infini double. C'est une transcendante entière, doublement périodique de troisième espèce.
La *cotangente :* c'est la dérivée logarithmique du sinus $\cot z = \frac{(\sin z)'}{\sin z}$.	La *fonction* ζ : c'est la dérivée logarithmique de la fonction σ $\zeta z = \frac{\sigma' z}{\sigma z}$.
Elle est méromorphe.	Elle est méromorphe.
La *dérivée de la cotangente changée de signe* $\frac{1}{\sin^2 z} = -(\cot z)'$.	La *dérivée de la fonction* ζ *changée de signe* $p z = -(\zeta z)'$.
C'est une fonction méromorphe périodique.	C'est une fonction méromorphe doublement périodique.
2° *Fonctions quelconques.*	2° *Fonctions quelconques.*
Ce sont des fonctions méromorphes simplement périodiques d'une espèce particulière. Ce sont des fonctions méromorphes ayant un théorème d'addition algébrique. On peut les exprimer rationnellement en fonction de l'exponentielle.	Ce sont des fonctions méromorphes doublement périodiques quelconques. Ce sont des fonctions méromorphes ayant un théorème d'addition algébrique. On peut les exprimer en fonction rationnelle de p et de p'.

Pour les trois types de fonctions ayant un théorème d'addition algébrique (fonctions rationnelles, trigonométriques, elliptiques), suivant qu'on veut les représenter par une somme d'éléments ou par le quotient de produits de facteurs linéaires, les éléments cor-

rélatifs de réduction sont

$\frac{1}{z}$	$\cot z$	ζz
z	$\sin z$	σz

Comme l'exponentielle, le logarithme, le sinus, etc., les fonctions de Weierstrass satisfont à des équations différentielles simples.

En les introduisant, au point de vue *logique*, il faut voir si l'on a affaire à des transcendantes irréductibles à un nombre limité de symboles algébriques ou exponentiels : Liouville, le premier, a traité cette question ([1]). Au point de vue *pratique*, on doit se préoccuper des services qu'elles peuvent rendre. Or, les applications des fonctions elliptiques sont innombrables : on les retrouve en Arithmétique, en Algèbre, en Géométrie, en Mécanique, en Physique ([2]). « C'est que les travaux des géomètres dans ces différentes directions sont si étroitement liés qu'ils se rencontrent, malgré la diversité de leurs buts, dans les mêmes théories analytiques ([3]). »

§ IV. — Les fonctions σ, ζ, p de Weierstrass.

147. *La fonction σ.* — Le sinus est un produit infini nul pour les valeurs $\mu\pi$: par analogie considérons le produit infini, nul aux points $2\mu\omega + 2\mu'\omega'$ ([4])

$$(1) \qquad \sigma z = z \prod_w{}' \left(1 - \frac{z}{w}\right) e^{\frac{z}{w} + \frac{1}{2}\frac{z^2}{w^2}} \qquad \begin{pmatrix} \mu, \mu' = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ w = 2\mu\omega + 2\mu'\omega' \\ w = 0 \text{ exclus} \end{pmatrix},$$

([1]) Liouville, *J. E. P.*, XXIIIe Cahier, p. 37; 1831, et *J. M.*, 1840, p. 34. Il montre l'impossibilité de la réduction des fonctions elliptiques, lorsqu'on les considère comme fonctions de leur amplitude, et établit qu'elles sont d'une transcendance plus élevée par rapport au module que par rapport à l'amplitude.

([2]) La série Θ de Jacobi s'était présentée à Fourier dans ses recherches sur la chaleur. Les fonctions elliptiques ont été appliquées à la Théorie des nombres, à la résolution de l'équation du cinquième degré, à l'étude des courbes de genre *un* et des surfaces, aux problèmes de mouvement des corps (pendule, rotation des solides, courbes élastiques, etc.).

([3]) Hermite, *Cours de la Faculté des Sciences*, 4e édit., p. 225.

([4]) Ces produits infinis ont été introduits par Eisenstein (*J. de Crelle*, t. 35); mais c'est à Weierstrass qu'est due la forme simple de la fonction σ. Pour les notations, cf. *Formules et propositions pour l'emploi des fonctions elliptiques*, d'après Weierstrass et Schwarz, traduction Padé, 1894.

ω et ω' étant deux nombres dont le rapport est imaginaire; on le désignera par la notation $\sigma(z \mid \omega, \omega')$ lorsqu'on voudra mettre ses périodes en évidence.

D'après une proposition générale de Weierstrass (n° **281**) c'est une transcendante entière. Ici établissons *directement* sa convergence absolue, et pour y parvenir prouvons celle de la série U de terme général $|u_n|$, que l'on obtient en posant

$$u_n = \left(1 - \frac{z}{w}\right) e^{\frac{z}{w} + \frac{1}{2}\frac{z^2}{w^2}} - 1 = -\frac{z^3}{w^3}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\frac{z}{w} + \ldots\right).$$

La série double U est comparable pour la convergence à celle de terme général $\frac{z^3}{w^3}$, puisque dans les deux séries on peut associer les termes de façon que le rapport de leurs modules ait pour limite $\frac{1}{3}$, quand w augmente indéfiniment. Or la série

$$\sum \frac{1}{w^3} = \sum{}' \frac{1}{(2\mu\omega + 2\mu'\omega')^3} \qquad \left(\begin{array}{c} \mu, \mu' = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ \mu = \mu' = 0 \text{ exclus} \end{array}\right)$$

converge absolument (p. 207) et reste absolument convergente lorsqu'on multiplie ses termes par le facteur fini z^3. Donc le produit σ *converge absolument et uniformément dans tout domaine fini* (¹).

148. *Cette fonction σ prend une infinité de formes, sans changer de valeur.* — Posons

$$\begin{array}{l} \omega_1 = m\omega + n\omega' \\ \omega'_1 = p\omega + q\omega' \\ w_1 = 2\mu_1\omega_1 + 2\mu'_1\omega'_1 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{c} m, n, p, q \text{ entiers} \\ mq - np = \pm 1 \\ \mu_1, \mu'_1 = 0, \pm 1, \ldots; w_1 = 0 \text{ exclus} \end{array}\right).$$

Les nombres w et w_1 sont les mêmes à l'ordre près; aussi, à l'ordre près, les produits $\sigma(z \mid \omega, \omega')$, $\sigma(z \mid \omega_1, \omega'_1)$ sont composés des mêmes facteurs. L'ordre des facteurs étant indifférent, les deux produits sont identiques. Ainsi la fonction σ ne change pas

(¹) Comme le sinus, la fonction σ est impaire; le rapport de la fonction à l'argument tend vers 1, quand l'argument tend vers zéro.
Toutes ses racines sont mises en évidence (p. 146), etc.

quand on y remplace le système des périodes par un système *équivalent quelconque* (¹).

149. *Première fonction associée : la série double* ζ. — En prenant la dérivée logarithmique, terme par terme, du produit σ, on obtient la série double

$$\frac{1}{z} + \sum_{w}{}' \left(\frac{1}{z - w} + \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2} \right) \qquad \left(\begin{matrix} w = 2\mu\omega + 2\mu'\omega' \\ w = 0 \text{ exclus} \end{matrix} \right).$$

Étudions cette série dans un domaine fini, ne renfermant aucun sommet du réseau des périodes. Son terme général pouvant s'écrire

$$\frac{z^2}{(z - w)w^2},$$

elle est comparable à la série de terme général $\frac{1}{w^3}$ (dans les deux séries, le rapport des termes correspondants a pour limite z^2, pour w infini). La série proposée converge donc absolument dans tout domaine ne contenant ni l'origine, ni les points w, et uniformément dans tout domaine ne contenant aucun de ces points et dont la frontière en reste à une distance finie. Nous la représenterons par ζz. Du reste, à cause de la convergence du produit σ et de la convergence uniforme de la série ζ, cette série est la dérivée logarithmique de la fonction σ; aussi l'on écrira

$$(2) \qquad \zeta z = \frac{\sigma' z}{\sigma z} = \frac{1}{z} + \sum_{w}{}' \left(\frac{1}{z - w} + \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2} \right).$$

La fonction ζ est uniforme. Elle n'a d'autres singularités que des pôles (o et w); ce sont des pôles de résidu 1. Elle est impaire.

150. *Deuxième fonction associée : la série double* p (²). — En dérivant terme par terme la série ζ, on obtient une nouvelle

(¹) C'est une propriété que n'auront pas les fonctions Θ de Jacobi; elles seront multipliées par des exponentielles lorsqu'on substituera aux périodes un système équivalent. (*Cf.* HERMITE, *Cours de la Faculté des Sciences*, 4ᵉ édit., p. 248.)

(²) L'*existence* des fonctions ζ et p résulte aussi des théorèmes généraux démontrés au Livre II.

La formule (3), peu commode pour le calcul numérique de la fonction p, met très simplement en évidence sa nature.

série, dont la convergence (absolue et uniforme) s'établit encore par comparaison, à l'aide de la série $\sum (w^3)^{-1}$: nous la représenterons par $-p(z)$. Du reste, pour la même raison que tout à l'heure, la dérivation terme par terme de la fonction ζ donne la dérivée de cette fonction; aussi l'on posera

$$(3) \qquad pz = -\zeta' z = \frac{1}{z^2} + \sum_w{}' \left[\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right].$$

La fonction pz est uniforme; elle a les mêmes régions de convergence absolue et uniforme que la série ζz; elle a pour pôles doubles les points o et w; enfin, c'est une fonction paire.

La combinaison des égalités (2) et (3) donne

$$pz = -\frac{d^2}{dz^2} \log \sigma z = \frac{(\sigma' z)^2 - \sigma z \sigma'' z}{\sigma^2 z}.$$

En dérivant terme par terme la série p, on obtient une nouvelle série double, absolument et uniformément convergente dans le même domaine que les séries ζ et p : c'est la dérivée de p. D'où l'égalité

$$p' z = -\frac{2}{z^3} - 2 \sum_w{}' \frac{1}{(z-w)^3} = -2 \sum_w \frac{1}{(z-w)^3}.$$

Cette fonction uniforme a pour pôles les points o et w; ces pôles sont triples. Elle est impaire, puisqu'elle est la dérivée d'une fonction paire.

Quand on veut mettre en évidence les périodes, on écrit

$$\zeta(z \mid \omega, \omega'), \quad p(z \mid \omega, \omega'), \quad p'(z \mid \omega, \omega').$$

151. Dans l'égalité (3), augmentons l'argument de 2ω; il vient

$$p(z + 2\omega) = \frac{1}{(z+2\omega)^2} + \sum_w{}' \left[\frac{1}{(z+2\omega-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right].$$

Faisons sortir du signe de sommation le terme $\frac{1}{z^2}$ (il correspond au système de valeurs $\mu = 1$, $\mu' = 0$), et faisons y entrer le terme $\frac{1}{(z+2\omega)^2}$ (il n'y figurait pas, puisque $w = 0$ était exclus). Ce groupement des termes montre que le second membre de la der-

nière égalité représente pz. *Cette fonction admet donc la période* 2ω, et dès lors aussi la *période* $2\omega'$.

On en conclut les égalités

$$\zeta'(z+2\omega) = \zeta'(z+2\omega') = \zeta' z,$$

ou bien, en intégrant,

$$(4)\qquad \begin{cases} \zeta(z+2\omega) = \zeta z + 2\eta, \\ \zeta(z+2\omega') = \zeta z + 2\eta'. \end{cases}$$

Les constantes d'intégration η et η' s'obtiendront en donnant à z les valeurs $-\omega$ et $-\omega'$. On a ainsi

$$\eta = \zeta\omega, \qquad \eta' = \zeta\omega',$$

puisque la fonction ζ est impaire.

La première des formules (4) peut s'écrire

$$\frac{\sigma'(z+2\omega)}{\sigma(z+2\omega)} = \frac{\sigma' z}{\sigma z} + 2\eta.$$

L'intégration donne

$$\sigma(z+2\omega) = C e^{2\eta z}\sigma z.$$

En remplaçant z par $-\omega$ et en se rappelant que la fonction σ est impaire, on voit que la constante C a pour valeur $-e^{2\eta\omega}$.

De là les relations

$$(5)\qquad \begin{cases} \sigma(z+2\omega) = -e^{2\eta(z+\omega)}\,\sigma z, \\ \sigma(z+2\omega') = -e^{2\eta'(z+\omega')}\,\sigma z; \end{cases}$$

les fonctions σ sont donc *périodiques de troisième espèce*.

L'application répétée de ces formules permet, connaissant les valeurs des fonctions σ, ζ, p en un point, de les obtenir aux points équivalents [1].

---

(1) A la fonction σ on adjoint trois fonctions qui jouent par rapport à elle le même rôle que le cosinus vis-à-vis du sinus. Elles sont définies par les égalités

$$\sigma_1 z = e^{\eta z}\frac{\sigma(\omega - z)}{\sigma\omega}, \qquad \sigma_2 z = e^{(\eta+\eta')z}\frac{\sigma(\omega+\omega'-z)}{\sigma(\omega+\omega')}, \qquad \sigma_3 z = e^{\eta' z}\frac{\sigma(\omega'-z)}{\sigma\omega'}.$$

Leur étude se ramène à celle de σ : ce sont des fonctions paires, etc.

Dans la notation de Jacobi, un peu modifiée par Hermite, la fonction ζ est

En résumé, cette étude sommaire des fonctions de Weierstrass a consisté, après avoir établi leur existence et trouvé leurs zéros et leurs infinis :

1° A discuter leur périodicité ;
2° A préparer la recherche de relations entre deux fonctions d'arguments différents, entre une fonction et sa dérivée.

Ce sont ces problèmes dont on poursuivra l'examen : on cherchera ce que deviennent ces fonctions lorsqu'on augmente leur argument d'un multiple ou d'un sous-multiple des périodes, et l'on étudiera les théorèmes d'addition. Les fonctions thêta donneront lieu aux mêmes questions. On verra mieux leur raison d'être quand nous parlerons des deux propriétés fonctionnelles caractéristiques des fonctions elliptiques ([1]).

152. *Dégénérescence.* — Lorsque les périodes deviennent infinies, les fonctions σ, ζ et p se réduisent à des fonctions plus simples.

Supposons ω *et* ω' *infinis.* — Dans la série p, tous les termes disparaissent, sauf le premier, et il vient

$$pz = \frac{1}{z^2},$$

d'où, par intégration

$$\zeta z = \frac{1}{z}, \qquad \sigma z = z.$$

Quand une seule période, ω' par exemple, *est infinie,* on a

$$pz = \frac{1}{z^2} + \sum{}' \left[\frac{1}{(z-2\mu\omega)^2} - \frac{1}{4\mu^2\omega^2}\right] \qquad (\mu = \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

---

remplacée par une fonction Z, qui en diffère par un terme linéaire en z, choisi de telle sorte que *la fonction* Z *admette la période* 2ω. Dès lors, on a (*J. de Crelle,* t. 82, p. 343)

$$Z(z) = \zeta z - \frac{\eta}{\omega} z.$$

([1]) C'est pour les mêmes raisons qu'en Trigonométrie élémentaire on cherche avant tout à établir un théorème d'addition et la périodicité.

La série $\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^2}$ ayant pour somme $\frac{\pi^2}{6}$ [1], on en tire

$$pz = -\frac{\pi^2}{12\omega^2} + \frac{1}{z^2} + \sum' \frac{1}{(z - 2\mu\omega)^2},$$

et, par suite, en rapprochant cette égalité de la définition de $(\sin^2 z)^{-1}$, on obtient la formule de dégénérescence

$$pz = -\frac{\pi^2}{12\omega^2} + \frac{\pi^2}{4\omega^2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi z}{2\omega}} \qquad (\omega' = \infty).$$

On en déduit, en intégrant et en donnant aux constantes les valeurs voulues,

$$\zeta z = \frac{\pi^2}{12\omega^2} z + \frac{\pi}{2\omega} \cot \frac{\pi z}{2\omega}, \qquad \sigma z = \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{\pi^2 z^2}{24\omega^2}} \sin \frac{\pi z}{2\omega}.$$

Les fractions rationnelles et les fonctions circulaires rentrent donc comme cas particuliers dans les fonctions de Weierstrass.

§ V. — Les fonctions thêta de Jacobi.

153. Qu'il s'agisse d'étudier au point de vue théorique les fonctions elliptiques, ou de s'en servir dans les applications, les fonctions σ, ζ, p de Weierstrass sont d'ordinaire préférables aux transcendantes anciennes. Elles donnent pour l'expression générale des fonctions elliptiques un *élément de réduction* plus simple [2]; elles conduisent à des formules plus symétriques :

---

[1] La recherche des sommes $\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^{2p}}$ se rattache à l'expression des nombres de Bernoulli (*cf.* Jordan, *Analyse*, 2e édit., t. I, p. 359). Dans le cas particulier ci-dessus ($p = 1$), il suffit de considérer la double identité

$$\begin{aligned}\frac{\sin \pi z}{\pi z} &= \frac{1}{\pi z}\left(\frac{\pi z}{1} - \frac{\pi^3 z^3}{3!} + \dots\right)\\ &= 1 - \frac{\pi^2 z^2}{6} + \dots\\ &= \left(1 - \frac{z^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{2^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{z^2}{\mu^2}\right)\cdots\end{aligned}$$

et d'égaler les coefficients de z^2 pour avoir la formule cherchée.

[2] Par exemple, les fonctions de Jacobi sn, cn, dn rapportées à un même système de périodes $4k$ et $4ik'$ ont quatre infinis, tandis que p a un seul infini double.

en particulier, dans la fonction σ, les deux périodes jouent le même rôle.

Mais cette symétrie masque des propriétés que l'emploi d'autres transcendantes ne laisse plus confondues ([1]). Aussi, non seulement les fonctions thêta de Jacobi ([2]) présentent un intérêt historique (c'est par elles que Jacobi a développé la théorie des fonctions elliptiques), un intérêt pratique [sans la connaissance des fonctions Θ, la lecture des Œuvres de Jacobi, d'Hermite, des travaux publiés pendant les 50 années qui ont suivi l'apparition des *Fundamenta nova* (1829) est impossible], mais elles constituent un élément analytique utile, par exemple dans la théorie des nombres, pour la découverte de nombreuses relations ([3]).

Plus loin, ces fonctions thêta se déduiront des fonctions σ; ici, introduisons-les directement.

154. Soient ω et ω' deux imaginaires telles que dans le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ le coefficient de i soit *positif*. Jacobi considère la série

$$\theta(z) = \frac{1}{i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)\frac{\pi i z}{2\omega}} \qquad \left(q = e^{\pi i \frac{\omega'}{\omega}};\ |q| < 1\right).$$

([1]) Les produits σ à double entrée sont des transcendantes entières, périodiques de troisième espèce relativement à 2ω et $2\omega'$. Les séries thêta à simple entrée sont des transcendantes entières, périodiques de première et de troisième espèce : les périodes n'y entrent plus que par *leur rapport*.

([2]) Jacobi étudie simultanément quatre séries d'exponentielles, et prend deux types de notations. Le plus souvent, comme dans les *Fundamenta nova,* il les désigne par $\Theta(z)$, $H(z)$, $\Theta_1(z)$, $H_1(z)$; c'est aussi ce que fait Hermite. Quand il part de l'étude des séries elles-mêmes pour arriver aux transcendantes elliptiques, il emploie les séries $\vartheta(z)$, $\vartheta_1(z)$, $\vartheta_2(z)$, $\vartheta_3(z)$ (*Œuvres,* t. I, p. 499); actuellement, avec Weierstrass (et les mathématiciens allemands), Halphen, M. Jordan, MM. Tannery et Molk, on fait plutôt usage de ces fonctions. Le passage des fonctions Θ aux fonctions ϑ (ou aux fonctions θ de Briot et Bouquet) est immédiat.

([3]) Voici en quels termes Dirichlet, dans son Éloge de Jacobi, apprécie l'importance de ces fonctions : « Les recherches de Jacobi sur les transcendantes elliptiques ... sont sorties d'une pensée qu'il faut peut-être mettre à la première place parmi ses conceptions. C'était l'idée d'introduire en Analyse, *comme transcendantes à étudier pour elles-mêmes,* les produits infinis, qui par leurs quotients avaient servi à Abel pour exprimer les fonctions elliptiques. En représentant par un développement en série ces produits, qu'il faut du reste regarder comme de même nature et comme des cas particuliers d'une transcendante, il faisait connaître une fonction rencontrée par les mathématiciens français dans leurs

1° *C'est une fonction transcendante entière.*

En effet, séparons la série en deux autres, correspondant aux valeurs positives et aux valeurs négatives de n, et à chacune d'elles appliquons la règle de convergence relative à $\sqrt[n]{|u_n|}$. En posant

$$\frac{z}{2\omega} = x + iy, \qquad \frac{\omega'}{\omega} = \tau = a + ib \qquad (b > 0),$$

on a, pour $n > 0$,

$$\sqrt[n]{|u_n|} = e^{-n\pi b - 2\pi y - \pi b}\, e^{-\frac{\pi b}{4n} - \frac{\pi y}{n}},$$

expression qui tend vers zéro pour n infini, si grand que soit $|y|$, à cause du facteur $e^{-n\pi b}$. Par suite, dans tout domaine borné, l'on a, à partir d'une valeur assez grande de n,

$$|\sqrt[n]{u_n}| < \alpha, \qquad |u_n| < \alpha^n \qquad (0 < \alpha < 1);$$

donc la série qui correspond aux valeurs positives de n converge absolument et uniformément (p. 122).

Un raisonnement analogue s'applique à la série formée par les termes à indices négatifs. Donc la série θ converge absolument et uniformément dans tout domaine fini.

---

recherches sur la Physique mathématique, mais dont ils avaient fait peu de cas et n'avaient découvert qu'une propriété. » (*Œuvres de Jacobi*, t. I, p. 14.)

« Je vois sans regret les fonctions sn, cn et dn reléguées au second plan; mais qu'il me soit permis de plaider un peu en faveur de la fonction Θ. La série si simple qui la représente met presque immédiatement en évidence ses propriétés essentielles, et cet avantage me semble compenser bien des inconvénients. Je crois donc qu'elle ne tardera pas, après une disgrâce passagère, à reprendre son rang à côté de la fonction σ. » [Poincaré, *Notice sur Halphen* (*J. E. P.*, LXe Cahier, p. 158).]

« La fonction σ n'a pas définitivement détrôné les fonctions θ, et en particulier celles de M. Hermite, comme pu a détrôné sn, cn et dn. La simplicité du développement des θ, la rapidité de la convergence, l'élégance de leurs propriétés leur assurent une place importante, et de cette place elles ne seront jamais délogées. » [Poincaré, *L'Œuvre de Weierstrass* (*A. M.*, t. XXII, p. 13).]

« Hermite reconnaissait sans doute l'avantage des notations de Weierstrass au point de vue de la théorie générale, et certains invariants mis en évidence étaient faits pour lui plaire. Mais je crois que la symétrie introduite le touchait peu, la dissymétrie dans les périodes se produisant nécessairement dans les applications. Rien n'aurait pu le décider à abandonner les fonctions Θ et les admirables identités, si précieuses pour l'Arithmétique, dont la forme lui était familière depuis tant d'années. » [Picard, *L'Œuvre d'Hermite* (*A. E. N.*, 1901).]

On en conclut qu'elle est continue.

On démontrerait de la même manière que la série formée par les dérivées des termes de la série θ jouit des mêmes propriétés : c'est donc la dérivée de la série θ.

Par suite, la série θ est continue, uniforme et analytique dans tout le plan, ainsi que sa dérivée : c'est une transcendante entière.

2° *Elle admet la période* 4ω, *et est périodique de troisième espèce par rapport à* $2\omega'$.

En effet, par la substitution $(z, z+2\omega)$, chaque terme u_n de $\theta(z)$ est multiplié par $e^{(2n+1)\pi i}$, et dès lors change de signe : d'où la période 4ω.

Si l'on représente $e^{\frac{i\pi z}{2\omega}}$ par ξ, la substitution $(z, z+2\omega')$ transforme ξ en $q\xi$, et u_n en

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{1}{i}(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+2\left(n+\frac{1}{2}\right)}\xi^{2n+1} = \frac{1}{i}(-1)^n q^{\left(n+\frac{3}{2}\right)^2}\xi^{2n+1}q^{-1} \\ &= -q^{-1}\xi^{-2}u_{n+1} = -q^{-1}e^{-\frac{i\pi z}{\omega}}u_{n+1}. \end{aligned}$$

Chaque terme se transformant dans le suivant, à un facteur près toujours le même, on a

$$\theta(z+2\omega') = -q^{-1}e^{-\frac{i\pi z}{\omega}}\theta(z).$$

155. En Trigonométrie, on associe au sinus la fonction obtenue en augmentant son argument du quart de la période : c'est le cosinus.

De même, il est commode de mener de front l'étude de quatre fonctions qui s'échangent entre elles, lorsqu'on ajoute à leur argument des fractions de périodes.

Avant de les définir, transformons la fonction θ en y prenant comme argument $\frac{z}{2\omega} = v$, et en y introduisant le *rapport* τ. $\theta(z)$, qui dépendait des variables z, ω, ω', devient une fonction $\vartheta_1(v)$ des deux variables v et τ, admettant la période 2, et périodique de troisième espèce par rapport à τ. On lui associe les

fonctions

$$\vartheta_2(v) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)v\pi i}, \qquad \vartheta_3(v) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{n^2} e^{2nv\pi i},$$

$$\vartheta_4(v) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2nv\pi i}.$$

On désigne ces *transcendantes entières* par les notations

$$\vartheta_i(v\,|\,\tau), \quad \vartheta_i(v, q) \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

lorsqu'il faut mettre en évidence soit le rapport τ, soit le nombre q.

Groupons deux à deux les termes pour lesquels les exposants de e sont égaux et de signes contraires. Les fonctions se présenteront sous forme de séries trigonométriques, commodes dans les applications numériques à cause de leur rapide convergence; on aura

$$\begin{aligned}
\vartheta_1(v) &= \phantom{1+{}} 2q^{\frac{1}{4}} \sin \pi v - 2q^{\frac{9}{4}} \sin 3\pi v + 2q^{\frac{25}{4}} \sin 5\pi v - \ldots, \\
\vartheta_2(v) &= \phantom{1+{}} 2q^{\frac{1}{4}} \cos \pi v + 2q^{\frac{9}{4}} \cos 3\pi v + 2q^{\frac{25}{4}} \cos 5\pi v + \ldots, \\
\vartheta_3(v) &= 1 + 2q \cos 2\pi v + 2q^4 \cos 4\pi v + 2q^9 \cos 6\pi v + \ldots, \\
\vartheta_4(v) &= 1 - 2q \cos 2\pi v + 2q^4 \cos 4\pi v - 2q^9 \cos 6\pi v + \ldots.
\end{aligned}$$

La fonction ϑ_1 est impaire; les autres sont paires.

156. Ces développements donnent immédiatement

$$\begin{aligned}
\vartheta_1(v+1) &= -\vartheta_1(v), & \vartheta_1(v+\tfrac{1}{2}) &= \vartheta_2(v), \\
\vartheta_2(v+1) &= -\vartheta_2(v), & \vartheta_2(v+\tfrac{1}{2}) &= -\vartheta_1(v), \\
\vartheta_3(v+1) &= \vartheta_3(v), & \vartheta_3(v+\tfrac{1}{2}) &= \vartheta_4(v), \\
\vartheta_4(v+1) &= \vartheta_4(v), & \vartheta_4(v+\tfrac{1}{2}) &= \vartheta_3(v).
\end{aligned}$$

Remplaçons n par $n+1$ dans la formule qui définit $\vartheta_1(v)$; il vient

$$\vartheta_1(v) = \frac{1}{i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^{n+1} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)\pi i(v+\tau)} q\, e^{2\pi i v} = -e^{\pi i(2v+\tau)} \vartheta_1(v+\tau);$$

par suite, en reprenant pour les fonctions ϑ_2, ϑ_3, ϑ_4 un calcul analogue et en posant

$$A = q^{-1} e^{-2i\pi v}, \qquad B = q^{-\frac{1}{4}} e^{-i\pi v},$$

on obtient les nouveaux groupes

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_1(v+\tau) &= -A\,\mathfrak{S}_1(v), & \mathfrak{S}_1\left(v+\frac{\tau}{2}\right) &= iB\,\mathfrak{S}_4(v),\\
\mathfrak{S}_2(v+\tau) &= A\,\mathfrak{S}_2(v), & \mathfrak{S}_2\left(v+\frac{\tau}{2}\right) &= B\,\mathfrak{S}_3(v),\\
\mathfrak{S}_3(v+\tau) &= A\,\mathfrak{S}_3(v), & \mathfrak{S}_3\left(v+\frac{\tau}{2}\right) &= B\,\mathfrak{S}_2(v),\\
\mathfrak{S}_4(v+\tau) &= -A\,\mathfrak{S}_4(v), & \mathfrak{S}_4\left(v+\frac{\tau}{2}\right) &= iB\,\mathfrak{S}_1(v).
\end{aligned}$$

Ils montrent que *les quotients deux à deux des fonctions* $\mathfrak{S}$ *sont doublement périodiques.*

Enfin, la combinaison des formules du deuxième et du quatrième groupe donne

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_1\left(v+\frac{1+\tau}{2}\right) &= B\,\mathfrak{S}_3(v),\\
\mathfrak{S}_2\left(v+\frac{1+\tau}{2}\right) &= -iB\,\mathfrak{S}_4(v),\\
\mathfrak{S}_3\left(v+\frac{1+\tau}{2}\right) &= iB\,\mathfrak{S}_1(v),\\
\mathfrak{S}_4\left(v+\frac{1+\tau}{2}\right) &= B\,\mathfrak{S}_2(v).
\end{aligned}$$

On voit ainsi comment les fonctions $\mathfrak{S}$ se permutent entre elles lorsqu'on ajoute à leur argument la moitié ou le quart des périodes (¹).

157. Supposons $\mathcal{R}\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right) > 0$; on peut alors passer du produit infini σz à la série d'exponentielles $\mathfrak{S}_1(v)$ par la relation

$$e^{-\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}z^2}\sigma z = 2\omega\frac{\mathfrak{S}_1(v)}{\mathfrak{S}'_1(0)} \qquad \left(v=\frac{z}{2\omega}\right).$$

Weierstrass l'établit en prenant comme point de départ un développement de la fonction σ en produit infini *simple,* et une transformation de ce produit en série (²).

On en déduit que les *seuls* zéros de la fonction impaire $\mathfrak{S}_1$ sont l'origine et les points congruents $\mu+\mu'\tau$, μ et μ' étant des entiers

(¹) *Cf.* WEIERSTRASS et SCHWARZ, *Formules, etc.,* trad. Padé, p. 45, ou TANNERY et MOLK, *Fonctions elliptiques,* t. II.

(²) WEIERSTRASS et SCHWARZ, *Formules, etc.,* trad., p. 40. — TANNERY et MOLK, *Fonctions elliptiques,* t. II, p. 2.

arbitraires (zéros que les formules du numéro précédent mettaient en évidence) puisque les *seuls* zéros de la fonction σ sont aux points $2\mu\omega + 2\mu'\omega'$.

Ces mêmes formules permettent de conclure, les zéros de la fonction $\mathfrak{S}_1$ étant supposés connus, que *les zéros et les seuls zéros* des fonctions $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{S}_4$ sont respectivement congrus à $\frac{1}{2}$, $\frac{1+\tau}{2}$, $\frac{\tau}{2}$ *modulis* 1, τ.

§ VI. — Les fonctions thêta a plusieurs arguments.

158. Les fonctions de Jacobi à un seul argument rentraient, directement ou indirectement, dans le type

$$\theta(z) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} e^{\pi i(\mu^2 a + \mu z)} \qquad (a = a' + ia''; \ a'' > 0).$$

C'est en considérant $\mu^2 a$ et μz comme des cas particuliers d'une forme quadratique par rapport à des entiers et d'une forme linéaire par rapport à des variables qu'on en a déduit des séries à p arguments ([1]).

Ces séries conduiront à des fonctions uniformes ayant $2p$ systèmes de périodes; en permettant l'inversion des intégrales abéliennes, elles fourniront directement les fonctions abéliennes;

([1]) Les fonctions thêta d'une variable avaient permis à Jacobi de faire l'inversion des intégrales elliptiques et d'étudier directement les fonctions elliptiques. Par une généralisation que Jacobi appelle *une divination heureuse*, en 1846 Göpel (*J. de Crelle*, t. 35, 1847) et Rosenhain (*Savants étrangers*, t. XI; *J. de Crelle*, t. 40) introduisirent les seize séries $\mathfrak{S}$ à deux arguments dont nous parlons plus bas, et s'en servirent pour la représentation *directe et explicite* des fonctions inverses des intégrales hyperelliptiques dans le cas où le polynome sous le radical est du cinquième ou du sixième degré, fonctions quadruplement périodiques déjà étudiées par Jacobi (*J. de Crelle*, t. 13, 1835). Weierstrass étendit la solution aux intégrales hyperelliptiques d'ordre quelconque. Enfin Riemann, par une éclatante découverte, résolut *au moyen des fonctions thêta généralisées le problème général de l'inversion des intégrales de différentielles algébriques.*

Cf. Hermite (*C. R.*, t. XL, XLVII, etc.). — Weierstrass (*Œuvres*, t. I, p. 133 et 297; t. II, p. 45 et 125). — Riemann (*Œuvres*, p. 142 et 425). — Kronecker (*J. de Crelle*, t. 68). — Thomæ (*J. de Crelle*, t. 75). — Frobenius (*J. de Crelle*, t. 97). — Briot, *Fonctions abéliennes*, p. 108. — Jordan, *Analyse*, 2e édit., p. 613. — Baker, *Abelian functions*, p. 246. — Clebsch et Gordan, *Theorie der Abel'schen Functionen*. — Weber, *Theorie der Abel'schen Functionen*, 1876. — Schottky, *Abriss einer Theorie der Abel'schen Functionen*

elles serviront en Géométrie dans l'étude des surfaces ([1]), en Mécanique ([2]), etc.

Considérons p variables indépendantes

$$z_\nu = z'_\nu + i z''_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p);$$

p^2 constantes $\left[\frac{p(p+1)}{2} \text{ au plus sont distinctes}\right]$ ([3])

$$\omega_{kl} = \omega_{lk} = \omega'_{kl} + i\omega''_{kl}, \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, p);$$

p entiers

$$\mu_1, \quad \ldots, \quad \mu_p \qquad (\text{variant de } -\infty \text{ à } +\infty).$$

Introduisons une forme quadratique φ par rapport à ces entiers, et une forme linéaire ψ par rapport aux variables

$$\varphi = \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{p} \omega_{kl}\mu_k\mu_l, \qquad \psi = \sum_{\nu=1}^{p} 2\mu_\nu z_\nu.$$

La série θ sera définie par l'égalité

$$\theta(z_1, \ldots, z_p) = \sum e^{\pi i(\varphi+\psi)}$$

$$= \sum_{\mu_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{\mu_p=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(\mu_1 z_1 + \ldots + \mu_p z_p) + \pi i \sum(\omega_{kl}\mu_k\mu_l)}.$$

---

von drei Variabeln, 1880. — PRYM, *Untersuchungen uber die Riemann'sche Thetaformel*, 1882. — KRAZER und PRYM, *Neue Grundlagen einer Theorie der allgemeinen Thetafunctionen*, 1892. — WIRTINGER, *Untersuchungen über Thetafunctionen*, 1895. — STAHL, *Theorie der Abel'schen Functionen*, 1896, etc.

([1]) *Cf.* par exemple : HUMBERT, *Théorie des surfaces hyperelliptiques* (*J. M.*, 1893). — WEBER, *Ueber die Kummer'sche Fläche vierter Ordnung* (*J. de Crelle*, t. 84).

([2]) *Cf.* par exemple le Mémoire couronné de SOPHIE KOWALEVSKI, *Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe* (*A. M.*, t. XII).

([3]) Les $2p$ systèmes de périodes d'une fonction uniforme quelconque de p variables satisfont, après une transformation de degré convenable effectuée sur ces périodes, aux mêmes relations $\left[\text{il y en a } \frac{p(p-1)}{2}\right]$ que le Tableau des périodes des fonctions θ. Aussi non seulement toute fonction abélienne, mais *toute fonction méromorphe* $2p$ *fois périodique de p variables est représentable par le quotient de deux fonctions* θ *à p arguments.*

Ce théorème, connu de Riemann au témoignage d'Hermite, a été établi par Weierstrass (dans ses Leçons orales) par MM. Poincaré et Picard (*C. R.*, 1883, 2e semestre, p. 1284), par M. Poincaré (*A. M.*, t. XXII, p. 163), par M. Appell pour $p = 2$ (*J. M.*, 1891), et d'une manière élémentaire par M. Painlevé (*C. R.*, 1902, 1er semestre, p. 808).

Discutons d'abord sa convergence. Si l'on appelle φ'' et ψ'' les formes représentant le coefficient de i dans φ et dans ψ, le terme général de la série θ aura pour module $e^{-\pi(\varphi''+\psi'')}$. Comparons-le à l'expression $(\varphi''+\psi'')^{-\alpha}$, où l'on supposera $2\alpha > p$, considérée elle-même comme terme général d'une série auxiliaire, dont les éléments s'obtiennent en faisant varier $\mu_1, \ldots, \mu_p$ de $-\infty$ à $+\infty$. Cette série auxiliaire converge (p. 210), *à condition que la forme* φ'' *soit positive* pour toutes les valeurs (entières ou non) des μ (le système $\mu_1 = \ldots = \mu_p = 0$ exclus); par suite, dans le cas où les constantes ω_{kl} sont choisies de manière à satisfaire à cette condition (et dans ce cas seulement), la série θ converge absolument, puisque les modules de ses termes décroissent plus rapidement que ceux de la série auxiliaire.

Le même raisonnement montre que la série θ, dérivée terme par terme par rapport à l'une quelconque des variables, engendre des séries jouissant des mêmes propriétés. Dans tout domaine fini la série θ est donc continue, uniforme et analytique par rapport à chaque variable, ainsi que ses dérivées partielles : *c'est une transcendante entière* ([1]).

Cette fonction est paire. — En effet, changer de signe toutes les variables revient à changer le signe de tous les entiers μ, modification qui laisse intacte la forme ψ et permute certains termes dans φ.

Étudions sa périodicité. — 1° L'addition de l'unité à l'un quelconque des arguments augmente chaque forme ψ d'un nombre pair, et dès lors multiplie θ par une puissance entière de $e^{2\pi i}$, ce qui laisse cette série invariable.

2° Remplaçons l'un des entiers $\mu_\nu (\nu = 1, \ldots, p)$ par $\mu_\nu - 1$, ce qui ne modifie pas la série θ, et, en même temps, ajoutons respectivement aux arguments $z_1, \ldots, z_p$ les constantes $\omega_{1\nu}, \ldots, \omega_{p\nu}$: chaque somme $\varphi + \psi$ augmente de $-2z_\nu - \omega_{\nu\nu}$. Il vient donc

$$\theta(z_1 + \omega_{1\nu}, \ldots, z_p + \omega_{p\nu}) = e^{-\pi i(2z_\nu + \omega_{\nu\nu})}\theta(z_1, \ldots, z_p).$$

([1]) On verra (Chap. IX, § 6) de quels développements ces fonctions sont susceptibles.

Aussi, comme Tableau des périodes relatif à cette fonction, on a

$$\begin{array}{llll} (10\ldots 0), & (01\ldots 0), & \ldots, & (0\ldots 01), \\ (\omega_{11}\omega_{21}\ldots\omega_{p1}), & (\omega_{12}\omega_{22}\ldots\omega_{p2}), & \ldots, & (\omega_{1p}\omega_{2p}\ldots\omega_{pp}) \qquad (\omega_{ik}=\omega_{ki}), \end{array}$$

La fonction est périodique de première espèce par rapport aux systèmes de périodes écrits dans la première ligne, et périodique de troisième espèce par rapport à ceux de la seconde.

159. Donnons une autre forme à cette série.

Par la substitution $(z_\nu, \lambda_\nu z_\nu)$ effectuée à la fois sur tous les arguments, on peut dans les p premiers systèmes obtenir comme périodes, à la place de l'unité, les inverses de constantes arbitraires λ_ν, et dès lors remplacer chaque système $(0\ldots 1\ldots 0)$ par $(0\ldots\pi i\ldots 0)$; en même temps dans les p derniers systèmes, remplaçons $\pi i\omega_{kl}$ par ω_{kl}. Si l'on représente par $\mathfrak{I}$ la fonction ainsi transformée (on l'appelle *série de Riemann*), il vient

$$\mathfrak{I}(z_1|\ldots|z_p) = \sum_{\mu_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{\mu_p=-\infty}^{\infty} e^{2\sum\limits_{\nu=1}^{p}\mu_\nu z_\nu + \sum\limits_{k=1}^{p}\sum\limits_{l=1}^{p}\omega_{kl}\mu_k\mu_l}.$$

Pour que cette série converge absolument, il faut et il suffit que dans la forme $\sum\omega_{kl}\mu_k\mu_l$ la partie réelle soit *négative* pour toutes les valeurs réelles (entières ou non) des μ ($\mu_1=\ldots=\mu_p=0$ exclus).

Appelons S_ν et T_ν les substitutions qui consistent à ajouter aux arguments $(z_1\ldots z_\nu\ldots z_p)$ l'un des systèmes de périodes $(0\ldots\pi i\ldots 0)$, $(\omega_{1\nu}\ldots\omega_{\nu\nu}\ldots\omega_{p\nu})$; la fonction $\mathfrak{I}$ satisfera aux équations fonctionnelles

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{I}(z_1|\ldots|z_\nu+\pi i|\ldots z_p) = \qquad\qquad \mathfrak{I}(z_1|\ldots|z_\nu|\ldots|z_p) \\ \mathfrak{I}(z_1+\omega_{1\nu}|\ldots|z_p+\omega_{p\nu}) = e^{-2z_\nu-\omega_{\nu\nu}}\,\mathfrak{I}(z_1|\ldots|z_p) \end{array}\right\} \quad (\nu=1,\ldots,p).$$

Transformons cette série $\mathfrak{I}$ par la substitution

$$(\mu_\nu, z_\nu;\ \mu_\nu+g_\nu, z_\nu+h_\nu\pi i),$$

effectuée simultanément pour toutes les valeurs $\nu=1,\ldots,p$; les g_ν et les h_ν représentent des constantes réelles qui seront ordinairement

des entiers ou des nombres rationnels. Le symbole $\begin{pmatrix} g_1 \dots g_p \\ h_1 \dots h_p \end{pmatrix}$ ou, en abrégé, $\begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$, est dit la *caractéristique* des fonctions transformées. Représentons-les par $\mathfrak{D}\begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}(z_1 | \dots | z_p)$: il suffit d'écrire explicitement leur définition pour voir que par les substitutions S_ν et T_ν les multiplicateurs 1 et $e^{-2z_\nu - \omega_{\nu\nu}}$ des formules précédentes sont multipliés respectivement par $e^{2g_\nu \pi i}$ et $e^{-2h_\nu \pi i}$, ce qui donne

$$\mathfrak{D}\begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}(z_1 | \dots | z_\nu + \pi i | \dots | z_p) = e^{2g_\nu \pi i} \qquad \mathfrak{D}\begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}(z_1 | \dots | z_\nu | \dots | z_p),$$
$$\mathfrak{D}\begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}(z_1 + \omega_{1\nu} | \dots | z_p + \omega_{p\nu}) = e^{-2h_\nu \pi i - 2z_\nu - \omega_{\nu\nu}} \mathfrak{D}\begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}(z_1 | \dots | z_p).$$

Une caractéristique est dite *normale* lorsque tous ses éléments g_ν, h_ν satisfont aux inégalités $0 \overline{\gtrless} g_\nu < 1$, $0 \overline{\gtrless} h_\nu < 1$. Deux caractéristiques sont *congruentes*, lorsque leurs éléments correspondants ne diffèrent que par des entiers; des fonctions dont les caractéristiques sont congruentes se ramènent les unes aux autres (¹).

A leur tour, ces fonctions transformées se généralisent et deviennent *fonctions thêta d'ordre m* par la substitution $(z_\nu, \omega_{\nu k}, h_\nu; m z_\nu, m \omega_{\nu k}, m h_\nu)$, m étant un entier positif, effectuée à la fois pour toutes les valeurs $\nu = 1, \dots, p$. Les substitutions S_ν et T_ν multiplient ces nouvelles fonctions par les exponentielles

$$e^{2mg_\nu \pi i}, \quad e^{-2mh_\nu \pi i - m(2z_\nu + \omega_{\nu\nu})}.$$

On regarde comme *fonctions thêta normales* celles qui ont une caractéristique normale : nous reviendrons sur leurs propriétés (²).

(¹) Dans le cas de deux variables, les caractéristiques ont été introduites par Hermite (*C. R.*, t. XL, p. 308; 1855).

(²) La série de Riemann est donc la fonction $\mathfrak{D}$ d'ordre 1 et de caractéristique $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Soit $p = 2$. Les seize fonctions $\mathfrak{D}$ d'ordre 1 ayant respectivement pour caractéristique chacune des seize caractéristiques $\begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$ $\left(g, h = 0, \frac{1}{2}\right)$ sont dites *hyperelliptiques*.

CHAPITRE IV.

FONCTIONS DÉFINIES PAR DES INTÉGRALES.

« Dans l'œuvre si étendue de Cauchy, une part principale doit être donnée à l'idée fondamentale d'étendre la notion première de l'intégrale définie, en faisant passer la variable, d'une limite à l'autre, par une succession de valeurs imaginaires suivant un chemin arbitraire. La Science n'a point d'exemple d'une conception plus féconde ([1]). »

« C'est à Cauchy que revient la gloire d'avoir fondé la théorie des intégrales prises entre des limites imaginaires : cette théorie a pour ainsi dire doublé la puissance de l'Analyse mathématique, et a été le point de départ de tous les travaux qui ont suivi, dans tous les pays où l'on cultive les Sciences exactes, en particulier en Allemagne et en France ([2]). »

Dans ce Chapitre, en parlant des fonctions holomorphes, nous les supposons définies par les conditions de Cauchy ([3]).

([1]) Hermite, *B. D.*, 1890, p. 29.

([2]) Poincaré, *A. M.*, t. IX, p. 321. — On pourrait multiplier les citations; ce mot de Kronecker les résume : « ... Die neueren Fortschritte der Analysis beruhen wesentlich auf dem Cauchy'schen Satze. » (*Vorlesungen über Math.*, t. I, p. 53.)

([3]) Cauchy donna son théorème fondamental (n° 168) dans le *Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires* (1825). Ici encore, mais sans rien publier, Gauss fut un précurseur, comme en témoigne la Lettre longtemps inédite qu'il écrivait à Bessel le 18 décembre 1811; en voici des passages essentiels :

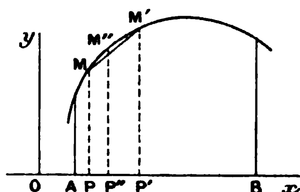
« Was soll man sich bei $\int \varphi(x)\,dx$ für $x = a + bi$ denken? Offenbar, ... muss man annehmen, dass x durch unendlich kleine Incremente (iedes von der Form $\alpha + \beta i$)... übergeht... Aber kann der Uebergang auf unendlich viele Arten geschehen ... Das Integral $\int \varphi(x)\,dx$ nach zweien verschiednen Übergangen

§ I. — La notion d'intégrale.

160. Rappelons quelques généralités sur les intégrales *à éléments réels.*

Pour évaluer les aires comprises entre une droite, deux ordonnées perpendiculaires et une courbe, Archimède y inscrivait des trapèzes en nombre suffisamment grand (*fig.* 26) : il remplaçait

Fig. 26.



même dans chacun d'eux la demi-somme des ordonnées MP, M'P' par l'ordonnée M''P'' d'un point intermédiaire convenable. Aussi quand Descartes eut appris à représenter les courbes par des équations, on fit remonter jusqu'au géomètre sicilien l'idée première de l'*intégrale* (¹).

La découverte de Leibniz et de Newton permit de regarder l'*intégrale définie* comme exprimant la somme des valeurs de la différentielle : on peut suivre dans les écrits de Leibniz les transformations successives qu'il faisait subir à cette notion, en diminuant toujours les côtés des trapèzes inscrits dans l'aire à évaluer,

---

immer einerlei Werth erhalte, wenn innerhalb das zwischen beiden die Uebergange repräsentirenden Linien eingeschlossenen Flächenraumes nirgends $\varphi(x) = \infty$ wird... Uebrigens ist zugleich hieraus klar, wie eine durch $\int \varphi(x)\,dx$ erzeugte Function für einerlei Werthe von x mehrere Werthe haben kann, indem man nemlich beim Uebergange dahin um einem solchen Punkt wo $\varphi(x) = \infty$ entweder gar nicht, oder einmal, oder mehreremale herumgehen kann.... » [Correspondance entre Gauss et Bessel. Leipzig 1880 (*Œuvres,* t. VIII, p. 90).]

(¹) *Quod calculum differentialem attinet, fateor multa ei esse communia cum iis quæ et tibi et Fermatio aliisque, imo jam ipsi Archimedi erant explorata.* (Leibniz à Wallis, 1698.) Bien avant la première publication de son *Calcul différentiel* (*Acta erudit.,* 1684) Leibniz avait découvert la *loi fondamentale du Calcul intégral* (p. 258), qui relie le problème de la quadrature des aires à celui des fonctions primitives.

et en rendant de moins en moins vague le sens de ce mot : *côtés très petits* [1].

Ce point de vue, laissé de côté par Euler, qui considérait surtout les sommes d'éléments comme fournissant une valeur *approchée* de l'intégrale [2], fut repris par Cauchy. A la notion géométrique de l'intégrale il substitua une *définition arithmétique précise* en la regardant comme la limite de la somme des valeurs infiniment petites de l'expression différentielle et montra « qu'une semblable intégrale a une valeur unique et finie, toutes les fois que, les deux limites de la variable étant des quantités finies, la fonction sous le signe $\int$ demeure elle-même finie et continue » [3]. C'est aussi la notion d'intégrale considérée comme la limite d'une somme que Dirichlet place au début de ses Leçons.

« Par une de ces vues qui n'appartiennent qu'aux esprits de premier ordre » Riemann généralisa cette conception et l'*étendit à des fonctions discontinues dans tout intervalle* [4].

Soit $f(x)$ une fonction déterminée et *finie* dans un intervalle

---

(1) Leibniz appelait l'intégrale *functio summatoria*, et la représentait par le *signe* $\int$.

C'est à Jean Bernoulli qu'est dû le mot d'*intégrale*. Du reste, il s'occupa surtout de l'*intégration*, c'est-à-dire de la réduction des intégrales à un nombre *limité* de symboles *élémentaires*. « Les méthodes d'intégration consistent principalement dans l'artifice ingénieux que les premiers inventeurs de l'Analyse infinitésimale ont imaginé pour décomposer les fractions rationnelles en fractions simples, et dans la transformation qui rend rationnel tout radical carré affectant un polynome du second degré, transformation due à Jean Bernoulli, aussi bien que la théorie des intégrales binomes. » (Liouville, *J. E. P.*, XXIIIe Cahier, 1834, p. 37.)

L'intégration au sens précédent étant en général impossible, la considération des intégrales élargit le champ de l'analyse par l'introduction d'une *infinité de transcendantes nouvelles*.

(2) Comme Bernoulli, Euler s'attache à la recherche explicite des intégrales : *Calculus integralis est methodus, ex data differentialium relatione inveniendi relationem ipsarum quantitatum : et operatio, qua hoc præstatur, integratio vocari solet* (1768).

(3) *Œuvres*, 2e série, t. IV, p. 122. — *J. E. P.*, XIXe Cahier, p. 571.

(4) *Cf.* Riemann, *Sur les séries trigonométriques* (*Œuvres*, 1854, p. 239). — Darboux, *Sur les fonctions discontinues* (*A. E. N.*, 1875, p. 74 et 89; 1879). — Jordan, *J. M.*, 1892, p. 81, et *Analyse*, 2e édit., t. I, p. 37. — De la Vallée-Poussin, *J. M.*, 1892, p. 424. — Tannery, *Introduction, etc.*, p. 268. — Harnack, *M. A.*, t. XIX, p. 243.

fermé $(ab)\, a < b$: elle a dans cet intervalle des limites supérieure et inférieure L et l (p. 26).

Partageons l'intervalle (ab) en n parties (ax_1), $(x_1 x_2)$, ..., $(x_{n-1} b)$, les nombres x_1, x_2, ..., x_{n-1} allant en croissant : dans chaque intervalle $(x_{i-1} x_i)$, la fonction a des limites supérieure et inférieure, L_i et l_i. Formons les sommes

$$\begin{aligned} S_n &= (x_1 - a)\, L_1 + \ldots + (x_i - x_{i-1})\, L_i + \ldots + (b - x_{n-1})\, L_n \\ s_n &= (x_1 - a)\, l_1 + \ldots + (x_i - x_{i-1})\, l_i + \ldots + (b - x_{n-1})\, l_n \end{aligned} \qquad (S_n \overline{\gtrless} s_n).$$

A chaque mode de subdivision de l'intervalle (ab) correspondent des sommes S_n et s_n. Les sommes S_n obtenues par tous les procédés de subdivision possibles ne sont jamais inférieures au nombre fixe $(b - a)l$; donc, quand les intervalles tendent vers zéro, elles ont une limite inférieure déterminée S. De même, les sommes s_n, qui ne dépassent jamais $(b - a)L$, ont une limite supérieure déterminée s (p. 26).

La limite inférieure S des sommes du type S_n n'est jamais plus petite que la limite supérieure s des sommes du type s_n.

En effet, considérons deux modes de subdivision absolument quelconques de l'intervalle (ab) fournis par les points

$$(a, x_1, \ldots, x_{n-1}, b), \qquad (a, x'_1, \ldots, x'_{p-1}, b),$$

et appelons S_n, s_n, S_p, s_p les sommes correspondantes. Un troisième mode de subdivision, obtenu en rangeant les nombres précédents (x_i, x'_k) de façon qu'ils aillent en croissant, donnera lieu à deux sommes Σ_m et σ_m telles que l'on ait

$$s_n \overline{\gtrless} \sigma_m, \qquad s_p \overline{\gtrless} \sigma_m, \qquad \Sigma_m \overline{\gtrless} S_n, \qquad \Sigma_m \overline{\gtrless} S_p.$$

On en déduit

$$s_p \overline{\gtrless} \sigma_m \overline{\gtrless} \Sigma_m \overline{\gtrless} S_n,$$

et, par suite,

$$s \overline{\gtrless} S.$$

M. Darboux appelle ces deux limites s et S *intégrales par excès et par défaut* [1]. *Quand elles ont même valeur, la*

---

[1] On désigne souvent les limites supérieure et inférieure d'un ensemble de nombres par $\overline{\lim}$ et $\underline{\lim}$, et ces intégrales par $\overline{\int}$ et $\underline{\int}$.

fonction est dite INTÉGRABLE dans l'intervalle (ab) : *cette valeur commune est* aussi par définition *celle de l'intégrale* [1].

On en conclut que, pour l'intégrabilité d'une fonction, il faut et il suffit que la différence $S_n - s_n$, correspondant à un *certain* partage de l'intervalle (ab), ait zéro pour limite, lorsqu'on subdivise ses parties en intervalles tendant vers zéro [2].

Cette définition conduit aux propositions suivantes :

1° *Une fonction continue* dans un intervalle *est intégrable* dans cet intervalle.

En effet, pour toute fonction bornée, on a

$$S_n - s_n = \Sigma[(L_{i+1} - l_{i+1})(x_{i+1} - x_i)].$$

Si la fonction est continue, on peut pousser assez loin la division en intervalles pour que, dans chacun d'eux, l'oscillation reste inférieure à un nombre positif arbitraire $\frac{\varepsilon}{b-a}$; donc $S_n - s_n$ peut descendre au-dessous de tout nombre positif ε.

2° *Une fonction qui* dans un intervalle *n'est jamais décrois-*

---

(1) Soit ξ_i un nombre arbitraire tel que $x_i \overline{\overline{<}} \xi_i \overline{\overline{<}} x_{i+1}$.
On aura

$$l_{i+1} \overline{\overline{<}} f(\xi_i) \overline{\overline{<}} L_{i+1} \quad \text{et, par suite,} \quad s_n \overline{\overline{<}} \Sigma[(x_{i+1} - x_i) f(\xi_i)] \overline{\overline{<}} S_n.$$

Donc, étant donnée une fonction intégrable, on peut regarder son intégrale comme la limite de

$$\Sigma[(x_{i+1} - x_i) f(\xi_i)]$$

et en particulier de

$$\Sigma[(x_{i+1} - x_i) f(x_i)];$$

géométriquement, l'intégrale s'obtient en prenant la limite d'une somme de rectangles.

(2) La condition est évidemment nécessaire.
Elle est suffisante. En effet, de l'inégalité $|S_n - s_n| < \varepsilon$, on déduit

$$|(S_n - S) + (S - s) + (s - s_n)| < \varepsilon.$$

Chacun des nombres entre parenthèse est positif ou nul, et dès lors peut descendre au-dessous de toute quantité positive donnée ε'. Mais S et s ont des valeurs fixes; donc S et s sont égaux. Du reste, la limite commune de S_n et de s_n représente l'intégrale, puisque les inégalités $|S_n - S| < \varepsilon'$, $|s_n - S| < \varepsilon'$ montrent que cette limite commune est S.

sante (et par suite une fonction n'ayant qu'un nombre fini de maxima et de minima), *est intégrable* dans cet intervalle ([1]).

En effet, l'hypothèse $f(x') \overline{\gtrless} f(x'')$ pour $a \overline{\gtrless} x' < x'' \overline{\gtrless} b$ donne

$$l_{i+1} = f(x_i), \qquad L_{i+1} = f(x_{i+1}).$$

Par suite, en appelant δ le plus grand des intervalles $(x_i x_{i+1})$, on a

$$S_n - s_n < \delta\,\Sigma[f(x_{i+1}) - f(x_i)] \quad \text{ou} \quad < \delta[f(b) - f(a)].$$

Il suffit de prendre $\delta < \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$ pour que $S_n - s_n$ descende au-dessous de ε.

3° Appelons *fonction à variation bornée* dans un intervalle (ab) une fonction bornée telle que, quelles que soient les subdivisions de (ab) en intervalles $(x_i x_{i+1})$, la somme

$$\Sigma\,|f(x_{i+1}) - f(x_i)|,$$

dite *variation totale*, reste inférieure à un nombre fixe.

Une pareille fonction est la différence de deux fonctions positives bornées non décroissantes; aussi *elle est intégrable*.

4° *Pour qu'une fonction finie soit intégrable dans un intervalle, il faut et il suffit que les points où l'oscillation de la fonction surpasse un nombre donné arbitraire si petit soit-il forment un ensemble non étendu* (p. 25 et 37).

La condition est suffisante.

En effet, l'intervalle (ab) peut être divisé en intervalles de deux types. La somme de ceux qui renferment des points où la discontinuité de la fonction surpasse un nombre choisi arbitrairement peut descendre au-dessous de tout nombre donné : du reste, dans ces intervalles, la fonction est bornée. Les autres peuvent être partagés en un nombre *fini* d'intervalles tels que, dans chacun d'eux, l'oscillation de la fonction reste inférieure à

([1]) Souvent on appelle *fonctions monotones* dans un intervalle celles qui, dans cet intervalle, ne sont jamais croissantes, ou jamais décroissantes.

un nombre arbitraire. Dès lors, d'après les raisonnements précédents, $S_n - s_n$ tend vers zéro.

La condition est du reste évidemment nécessaire.

En résumé, les fonctions continues sont toujours intégrables; les fonctions totalement discontinues ne le sont jamais. Les fonctions ponctuellement discontinues doivent, au point de vue de l'intégrabilité, être réparties en deux classes ([1]).

Les considérations précédentes supposent la *fonction finie* dans l'intervalle (ab), et l'*intervalle lui-même fini*. Si la fonction devient infinie en b, l'intégrale dans l'intervalle (ab) est, par

---

([1]) Relativement aux fonctions continues, il y a identité entre les notions d'*intégrale* et de *fonction primitive :* différentier et intégrer sont des opérations réciproques. Quelles modifications la généralisation de Riemann apporte-t-elle à cette *loi fondamentale du Calcul intégral,* ou d'une manière plus précise :

1° Soient $f(x)$ une fonction finie et intégrable dans un intervalle (ax) et $F(x)$ son intégrale : *réciproquement, la fonction continue* $F(x)$ *a-t-elle une dérivée, et cette dérivée est-elle égale à* $f(x)$?

Oui, si $f(x)$ est continue; pas nécessairement dans le cas contraire. Ce qui est vrai, c'est que les quatre dérivées de $F(x)$ sont intégrables (p. 42) et ont chacune pour intégrale $F(x)$.

Par exemple, prenons pour $f(x)$ la fonction de Riemann (p. 38). En un point x, la fonction $F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ a pour dérivées à droite et à gauche $f(x+0)$ et $f(x-0)$: donc $F(x)$ n'a pas de dérivée déterminée aux points $\frac{2k+1}{2n}$, et en a une aux autres points.

2° Soient $F(x)$ une fonction continue, et $f(x)$ l'une de ses quatre dérivées : *réciproquement, obtient-on* $F(x)$ *à une constante près par l'intégration de* $f(x)$?

Évidemment non, si $f(x)$ n'est pas intégrable. Oui, si $f(x)$ est finie et intégrable : même alors, les trois autres dérivées sont finies et intégrables, et l'intégration de l'une quelconque des quatre dérivées donne à une constante près $F(x)$. C'est ce qu'ont prouvé du Bois-Reymond (*M. A.*, t. XVI, p. 115) et Dini (*Fondamenti per la teorica delle funzioni*). *Cf.* aussi Schœnflies, *Die Entwickelung,* etc., p. 206. — Voss, *Encyklopädie der math. Wiss.*, t. II, p. 100.

M. Lebesgue a essayé de donner une définition de l'intégrale, comprenant comme cas particulier celle de Riemann, et résolvant le problème des fonctions primitives. Soit y une fonction croissante dans un intervalle. Au lieu de partir, comme Riemann, de la division en intervalles partiels, et d'en multiplier les longueurs par l'une des valeurs y_i de la fonction dans chaque intervalle, inversement au départ on se donne la division des variations de la variation, c'est-à-dire les nombres y_i (cf. *C. R.*, 1901, 1er semestre, p. 1025).

définition, la limite, si elle existe, de l'intégrale

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \qquad \text{(quand } \varepsilon \text{ tend vers zéro).}$$

Par un procédé analogue, on étend, quand c'est possible, la notion d'intégrale à un intervalle qui grandit indéfiniment.

Les intégrales obtenues de cette façon s'appellent *intégrales définies généralisées* ou *impropres* (¹).

161. La conception de Riemann a *élargi* la notion d'intégrale simple déjà rendue *précise* par Cauchy et Dirichlet. La théorie des ensembles et spécialement les propriétés des ensembles *non étendus* à plusieurs dimensions (p. 25) rendent immédiate l'extension de cette définition aux *intégrales multiples* (²).

Pour définir, par exemple, l'intégrale double, relative à un domaine continu $\mathfrak{D}$ ayant une aire déterminée (³) d'une fonction $f(x, y)$ finie dans ce domaine et sur sa frontière, on le partage en un nombre arbitraire n de parties ayant des aires déterminées $\delta_1, \ldots, \delta_i, \ldots, \delta_n$. Soient L_i et l_i les limites supérieure

(¹) *Cf.* RIEMANN, *Œuvres*, traduction p. 240 et 242.

(²) Le premier, M. Thomæ, en réponse à une remarque de du Bois-Reymond, justifia l'extension aux intégrales doubles de la définition de Riemann (*Zeitschrift für Math.*, 1876, p. 224).

(³) La notion de l'aire du rectangle étant supposée admise, voici comment l'on peut définir analytiquement l'aire d'un domaine continu $\mathfrak{D}$ limité par un contour fermé C.

Décomposons le plan en carrés égaux par des parallèles aux axes, et considérons successivement la somme σ_n des carrés dont tous les points sont intérieurs à $\mathfrak{D}$, et la somme Σ_m des carrés qui ont tous leurs points ou au moins quelques-uns de leurs points appartenant à $\mathfrak{D}$ ou à sa frontière. Lorsque les côtés de ces carrés tendent vers zéro, ces deux sommes ont respectivement des limites supérieure et inférieure déterminées a et A ($a \lesseqgtr A$); a et A définissent l'étendue intérieure et l'étendue extérieure du domaine $\mathfrak{D}$ (p. 25, note). *Lorsqu'elles sont égales, on dit que le domaine est quarrable ou a une aire déterminée;* leur valeur commune (a ou A) représente l'*étendue de l'aire*. (JORDAN, *Analyse*, 2ᵉ édit., t. I, p. 28 et 107.)

Un domaine est quarrable lorsqu'on peut construire deux lignes polygonales fermées, l'une intérieure, l'autre extérieure à C, et telles que l'aire comprise entre ces deux lignes soit inférieure à un nombre arbitraire : pour cela, *il suffit* qu'une droite quelconque ne rencontre C qu'en un nombre limité de points, ou même que C soit une ligne rectifiable sans point multiple (p. 266, note).

et inférieure de la fonction dans l'aire δ_i : les sommes

$$S_n = \Sigma L_i \delta_i, \qquad s_n = \Sigma l_i \delta_i,$$

étendues au domaine $\mathfrak{D}$, ont respectivement des limites inférieure et supérieure S et s, lorsque les aires δ_i tendent toutes vers zéro, ainsi qne la plus grande des cordes inscrites dans ces aires. *On les appelle* INTÉGRALES *par excès et par défaut.* Quand ces deux intégrales ont même valeur, c'est-à-dire quand la somme $\Sigma(L_i - l_i)\delta_i$ tend vers zéro avec les δ_i, on dit que la fonction est intégrable dans le domaine $\mathfrak{D}$; la valeur commune de S et de s définit celle de l'intégrale.

De là ce théorème :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction, finie et déterminée dans un domaine fermé quarrable, soit intégrable dans ce domaine, consiste en ce que les points où la discontinuité de la fonction surpasse un nombre donné arbitraire forment un ensemble à deux dimensions non étendu (¹).

Comment effectuer le calcul de cette intégrale double ?

Prenons d'abord comme champ d'intégration un rectangle R de côtés parallèles aux axes : soient $(x_0 y_0)$ $(x_1 y_1)$ deux sommets opposés. *Le calcul de l'intégrale double*

$$J = \int\int_R f(x, y)\, dx\, dy$$

revient au calcul successif de deux intégrales simples.

En effet, la définition des intégrales doubles par excès et par défaut S et s, relatives à la fonction finie f, montre assez facilement (²) que l'égalité de S et de s, c'est-à-dire l'existence de J,

(¹) Un pareil ensemble peut renfermer des lignes continues, même en nombre tel que leur ensemble ait la puissance du continu.

(²) *Cf.* DU BOIS-REYMOND, *J. de Crelle*, t. 94, p. 277. — STOLZ, *M. A.*, t. XXVI, p. 89. — HARNACK, *M. A.*, t. XXVI, p. 566. — JORDAN, *J. M.*, 1888, p. 84. — PRINGSHEIM, *C. R. de l'Ac. de Munich*, 1898, p. 68; 1899, p. 40. — SCHÖNFLIES, *Die Entwickelung*, etc., p. 192.

Voici, par exemple, comment, l'existence de J étant supposée, M. Pringsheim

entraîne l'existence des quatre intégrales

$$\int_{y_0}^{y_1} dy \overline{\int}_{x_0}^{x_1} f\,dx, \quad \int_{y_0}^{y_1} dy \underline{\int}_{x_0}^{x_1} f\,dx,$$

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \overline{\int}_{y_0}^{y_1} f\,dy, \quad \int_{x_0}^{x_1} dx \underline{\int}_{y_0}^{y_1} f\,dy,$$

---

démontre l'égalité

$$\text{(1)} \qquad J = \int_{x_0}^{x_1} dx \overline{\int}_{y_0}^{y_1} f(x, y)\,dy.$$

La définition d'intégrale simple par excès S, relative à une fonction $\varphi(x)$ et à un intervalle (x_0, x_n), donne

$$S = \overline{\lim_{\delta_i = 0}} \sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i)\,\delta_i \qquad \begin{pmatrix} \delta_i = x_i - x_{i-1} \\ x_{i-1} \leqq \xi_i \leqq x_i \end{pmatrix},$$

ou bien, en prenant égaux entre eux les intervalles δ_i,

$$\text{(2)} \qquad S = \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi\left[x_0 + \frac{(i+\theta_i)a}{n}\right] \qquad \begin{pmatrix} x_n - x_0 = a \\ 0 \leqq \theta_i \leqq 1 \end{pmatrix}.$$

Cette formule rappelée, divisons le rectangle R en rectangles élémentaires égaux $r_{\mu\nu}$, et appelons $\xi_{\mu\nu}$, $\eta_{\mu\nu}$ les coordonnées d'un point arbitraire appartenant à $r_{\mu\nu}$. La définition de J donne

$$J = \lim_{r_{\mu\nu}=0} \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_{\mu\nu}, \eta_{\mu\nu})\, r_{\mu\nu}$$

$$= \lim_{m=\infty,\ n=\infty} \frac{ab}{mn} \sum_{\mu=0}^{m-1} \sum_{\nu=0}^{n-1} f\left[x_0 + \frac{(\mu+\theta_\mu)a}{m}, y_0 + \frac{(\nu+\theta'_\nu)b}{n}\right] \qquad \begin{pmatrix} x_1 - x_0 = a \\ y_1 - y_0 = b \\ 0 \leqq \theta_\mu \text{ et } \theta'_\nu \leqq 1 \end{pmatrix},$$

et par suite, puisque par hypothèse cette dernière limite existe

$$J = \lim_{m=\infty} \frac{a}{m} \sum_{\mu=0}^{m-1} \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{b}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} f\left[x_0 + \frac{(\mu+\theta_\mu)a}{m}, y_0 + \frac{(\nu+\theta'_\nu)b}{n}\right].$$

On a donc, en s'aidant d'une transformation analogue à celle que définit l'équation (2),

$$J = \lim_{m=\infty} \frac{a}{m} \sum_{\mu=0}^{m-1} \overline{\int}_{y_0}^{y_1} f\left[x_0 + \frac{(\mu+\theta_\mu)a}{m}, y\right] dy,$$

relation qui n'est autre que la formule (1).

leur identité avec J et, dès lors, l'identité des quatre intégrales ([1]).

Passons au cas où le champ d'intégration est un domaine quelconque $\mathfrak{D}$ quarrable; pour simplifier, nous supposerons que sa frontière C est rencontrée seulement en deux points par des parallèles aux axes. Désignons par x_0 et x_1, y_0 et y_1 les abscisses et les ordonnées relatives aux points de C le plus à gauche et le plus à droite, le plus haut et le plus bas, par $\varphi_0(x)$ et $\varphi_1(x)$

([1]) On en conclut que dans ce cas l'expression

$$\int_{y_0}^{y} dy \left[\overline{\int_{x_0}^{x}} f(x, y)\, dx - \underline{\int_{x_0}^{x}} f(x, y)\, dx \right]$$

(où la quantité entre parenthèse Δ n'est jamais négative) est nulle; dès lors, en vertu de la condition d'intégrabilité (p. 257), que $\int_{x_0}^{x} f(x, y)$ existe au moins sur un ensemble y partout dense dans l'intervalle $(y_0 y)$, et que les valeurs de y pour lesquelles Δ surpasse un nombre arbitraire forment un ensemble non étendu dans cet intervalle.

La réciproque n'est pas vraie. — L'une des expressions $\lim\limits_{\alpha=0} \lim\limits_{\beta=0} \varphi(\alpha, \beta)$, $\lim\limits_{\beta=0} \lim\limits_{\alpha=0} \varphi(\alpha, \beta)$ peut exister sans l'autre; elles peuvent exister et avoir même valeur sans que $\lim\limits_{\alpha=0\ \beta=0} \varphi(\alpha, \beta)$ existe. Aussi :

1° L'une des intégrales

$$I_1 = \int_{y_0}^{y} dy \int_{x_0}^{x} f\, dx, \qquad I_2 = \int_{x_0}^{x} dx \int_{y_0}^{y} f\, dy,$$

peut exister sans l'autre. Le premier exemple en a été donné par M. Thomæ (*Zeitschrift für Math.*, 1878, p. 67) : il prend $f(x, y)$ égal à 1 ou à $2y$ suivant que x est rationnel ou irrationnel, et pour limites (0, 1) (0, 1). Alors I_1 n'a pas de sens et I_2 a la valeur 1.

2° I_1 et I_2 peuvent avoir un sens et avoir même valeur, sans que J existe.

Cf. Pringsheim, *C. R. de l'Ac. de Munich*, 1899, p. 47. — Schœnflies, *Op. cit.*, p. 197.

Ces faits tiennent à l'existence d'ensembles partout denses dans un domaine, alors qu'ils ne sont partout denses sur aucune horizontale et sur aucune verticale. De même, pour décider dans quels cas l'existence de I_1 entraîne celle de I_2, c'est-à-dire dans quels cas on peut intervertir l'ordre des intégrations, il faut comparer, au point de vue de l'étendue, les ensembles formés par les discontinuités de f, suivant qu'on les considère comme distribuées sur des horizontales ou sur des verticales.

les valeurs de y qui correspondent sur la courbe C à chaque valeur de $x (\varphi_0 < \varphi_1)$, par $d\omega$ l'aire d'une des divisions de $(\mathfrak{D})$.

L'existence de J *dans l'aire* $(\mathfrak{D})$ *entraîne l'égalité*

$$(1) \qquad J = \int\int_{(\mathfrak{D})} f(x, y)\, d\omega = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{\varphi_0(x)}^{\bar{\varphi}_1(x)} f(x, y)\, dy.$$

En effet, soit $g(x, y)$ une fonction égale à $f(x, y)$ dans l'aire $(\mathfrak{D})$ et nulle à son extérieur; soit R un rectangle ayant ses côtés parallèles aux axes et tangents à C.

La discontinuité de $g(x, y)$ le long de C n'empêche pas l'intégrabilité de $g(x, y)$ dans R : comme l'intégrale de cette fonction étendue au domaine $R - (\mathfrak{D})$ est nulle, il vient

$$\int\int_{(\mathfrak{D})} f(x, y)\, d\omega = \int\int_{R} g(x, y)\, dR.$$

D'après les résultats relatifs au rectangle, on avait

$$\int\int_{R} g(x, y)\, dR = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{\bar{y}_1} g(x, y)\, dy;$$

du reste, pour toute valeur de x appartenant à l'intervalle $(x_0\, x_1)$, on peut écrire

$$\int_{y_0}^{\bar{y}_1} g(x, y)\, dy = \int_{\varphi_0(x)}^{\bar{\varphi}_1(x)} f(x, y)\, dy.$$

On en déduit immédiatement la formule (1).

162. La notion d'*intégrale curviligne* revient à celle d'*intégrale rectiligne*.

Prenons une ligne AM dont l'équation puisse être mise sous la forme $y = f(x)$; désignons par $(x_0 y_0)$, (xy) ses points extrêmes A et M, et par $u(x, y)$ une fonction *continue* le long de cette ligne; enfin supposons que la fonction $f(x)$ est *continue* dans l'intervalle $(x_0 x)$, et que la courbe est coupée au plus en un point par les parallèles à Oy.

La fonction *déterminée et continue* $u[x, f(x)]$ est intégrable dans l'intervalle $(x_0 x)$. Au lieu d'indiquer, dans l'élément différentiel de l'intégrale correspondante, la dépendance entre x et y en mettant en évidence la forme de la fonction f, on peut recourir

à l'image géométrique, parler d'intégrale *évaluée le long de l'arc* AM, et pour la représenter, substituer au symbole

$$\int_{x_0}^{x} u[x, f(x)]\, dx,$$

l'une des notations

$$\int_{\text{AM}} u(x, y)\, dx, \quad \int_{x_0 y_0}^{xy} u(x, y)\, dx.$$

L'intégrale ainsi envisagée est une intégrale curviligne.

Cette définition revient à intercaler entre les extrémités A et M de l'arc AM des points de division $(x_1 y_1) \ldots (x_i y_i) \ldots$, et à dire que l'intégrale curviligne est la limite de la somme

$$\sum [(x_{i+1} - x_i)\, u(x_i, y_i)] \qquad (i = 0, 1, \ldots),$$

quand le nombre des divisions augmente indéfiniment, de façon que tous les intervalles $(x_i x_{i+1})$ tendent vers zéro.

Définition analogue pour les intégrales curvilignes

$$\int_{\text{AM}} v(x, y)\, dy,$$

que l'on associe souvent aux premières (on suppose x fonction uniforme et continue de y le long de l'arc AM) (¹).

Pour étendre cette notion au cas où la ligne AM est rencontrée en plus d'un point par des parallèles aux axes, nous *supposerons* qu'elle est divisible en parties, satisfaisant chacune à la condition exigée au début, et nous prendrons une somme d'intégrales. On peut dire aussi que dans la sommation des éléments de l'intégrale, on part du point A, et marchant sur la courbe dans le sens des arcs croissants, on doit faire correspondre à chaque valeur de x *celle des valeurs de* y qui est relative au point où l'on est parvenu.

Remarque. — Soient $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, les équations de la ligne continue AM; pour simplifier, nous supposerons aussi la

(¹) Lorsqu'un arc de courbe $y = f(x)$ est divisible en parties telles que pour chacune d'elles y soit fonction uniforme de x, et x fonction uniforme de y, alors si y est fonction continue de x, x est fonction continue de y (*cf.* JORDAN, *Analyse*, 2ᵉ édit., t. I, p. 53).

continuité des fonctions φ' et ψ', sauf peut-être en un nombre limité de points, où elles passent d'une valeur finie à une autre valeur finie. Un changement de variable, que les hypothèses rendent légitime (1), donne pour valeur de l'intégrale curviligne le long de AM l'intégrale rectiligne

$$\int_{t_0}^{T} u[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t)\,dt.$$

(On suppose que, t croissant de t_0 à T, un mobile parcourt l'arc AM en marchant toujours dans le même sens.) De là, dans le cas considéré, un *procédé* plus général pour le *calcul* de l'intégrale curviligne.

163. Les intégrales *entre des limites imaginaires* se ramènent aux intégrales curvilignes.

Soit $f(z)$ une fonction déterminée et *continue* le long d'un arc AM du type défini ci-dessus. Cauchy définit l'intégrale de $f(z)$ le long de cette ligne, en divisant la ligne en n parties aux points $z_1, \ldots, z_i, \ldots$, et en regardant l'intégrale comme la *limite de la somme des éléments* $f(z_i)[z_{i+1} - z_i]$, quand les différences $|z_{i+1} - z_i|$ tendent vers zéro.

---

(1) Étant données une fonction $f(x)$ uniforme, finie et *intégrable* dans un intervalle $(x_0 X)$ et une fonction $x = \varphi(t)$ *continue* dans l'intervalle correspondant $(t_0 T)$, *à quelles conditions peut-on, dans l'intégrale* $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$, *faire le changement de variable* $x = \varphi(t)$?

D'après la définition de l'intégrale :

1° *Il suffit* que la fonction $\varphi(t)$ *soit monotone et ait une dérivée continue* dans l'intervalle $(t_0 T)$. Même si $f(x)$ est intégrable pour les valeurs de x, correspondant à l'intervalle $(t_0 T)$, qui sont extérieures à l'intervalle $(x_0 X)$, $\varphi(t)$ peut n'être pas monotone.

2° *Il suffit* que $\varphi(t)$ *soit monotone et ait une dérivée finie intégrable* dans l'intervalle $(t_0 T)$.

Cf. TANNERY, *Introduction*, etc., p. 325. — JORDAN, *Analyse*, 2e édit., t. I, p. 135.

D'après cela, non seulement les hypothèses faites sur la continuité de φ' et de ψ' ont uniquement pour but de permettre d'*évaluer* l'intégrale curviligne au moyen de l'intégrale rectiligne ci-dessus, mais même ce procédé d'évaluation resterait légitime avec des hypothèses plus larges.

Pour prouver l'existence de cette limite, supposons $f(z)$ mis sous la forme $u+iv$, ce qui donne

$$\begin{aligned}\sum\{f(z_l)[z_{l+1}-z_l]\}\\ = \quad & \sum\{u(x_l,y_l)[x_{l+1}-x_l]-v(x_l,y_l)[y_{l+1}-y_l]\}\\ & +i\sum\{v(x_l,y_l)[x_{l+1}-x_l]-u(x_l,y_l)[y_{l+1}-y_l]\}.\end{aligned}$$

En vertu des hypothèses relatives à l'arc AM et de la continuité de $f(z)$, qui entraîne celle des fonctions u et v, le second membre a une limite; cette limite est la somme d'intégrales curvilignes associées par le symbole i : on a donc par définition

$$\int_{\mathrm{AM}} f(z)\,dz=\int_{\mathrm{AM}}(u\,dx-v\,dy)+i\int_{\mathrm{AM}}(v\,dx+u\,dy).$$

Si la ligne d'intégration AM avait des équations de la forme

$$x=\varphi(t),\qquad y=\psi(t),$$

telles que de plus les dérivées $\varphi'(t)$ et $\psi'(t)$ fussent continues, le *calcul* de l'intégrale se ramènerait à des intégrales rectilignes par la méthode indiquée plus haut [1].

Remarque. — Cette définition fait intervenir le *chemin* suivi par la variable pour aller de la limite z_0 à la limite z.

---

[1] Un calcul direct ou un théorème précédent (p. 257, 30) montre que $\lim\sum\{f(z_l)[z_{l+1}-z_l]\}$ existe toutes les fois que la *ligne* AM *est rectifiable*. (*Cf.* JORDAN, *Analyse*, 2ᵉ édit., t. I, p. 182.) Aussi désormais nous pourrons prendre comme chemin d'intégration toute ligne rectifiable. Rappelons leur définition.

Une *ligne est rectifiable* quand elle est continue et *a une longueur,* c'est-à-dire quand il existe une limite au périmètre d'un polygone inscrit (de la manière habituelle) dans la courbe. Pour que cette limite existe, *il suffit* (et c'est là l'énoncé élémentaire) que les fonctions φ et ψ soient continues ainsi que leurs dérivées (en ce cas, l'arc a aussi une dérivée) : de fait, *il faut* et il suffit *que les fonctions φ et ψ soient continues et à variation bornée.* (*Cf.* JORDAN, *Analyse,* 2ᵉ édit., t. I, p. 100. — SCHEEFER, *A. M.*, t. V, p. 49, *Allgemeine Untersuchungen über Rectification der Curven.* — STUDY, *M. A.*, t. XLVII, p. 313. — ASCOLI, *Jahrbuch der Mathematik*, t. XVI, p. 339.)

Tout ensemble fermé, dont les éléments sont rangés dans un certain ordre et qui est la *représentation continue* d'un segment de droite (p. 29) est regardé comme une ligne continue; dès lors il ne suffisait évidemment pas de prendre comme lignes d'intégration des lignes continues. (Le carré considéré par MM. Peano et Hilbert peut être regardé comme une ligne continue; on voit combien, en pareille matière, il faut se défier de l'intuition géométrique. *Cf.* p. 16.)

Elle ne suppose pas analytique la fonction continue $f(z)$.

Elle subsiste, si la fonction tout en restant finie, est discontinue en un nombre limité de points de AM.

Cette ligne peut être formée d'un seul arc de courbe, ou d'un nombre limité d'arcs rectifiables.

L'intégrale a deux valeurs égales et de signes contraires pour un même chemin parcouru dans deux sens différents.

Appelons L la longueur de la ligne d'intégration, et M le maximum de $|f(z)|$ le long de cette ligne. Le module d'une somme ne dépasse pas la somme des modules; d'où l'inégalité

$$\left|\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz\right| \lesseqgtr \mathrm{ML},$$

qui donne, pour l'intégrale, une limite supérieure souvent utile.

164. En poursuivant cette étude, nous supposerons *analytique* la fonction sous le signe d'intégration.

THÉORÈME. — *Une fonction analytique dans un domaine a pour intégrale une fonction analytique dans ce domaine.*

En effet, de la définition

$$w(z) = \int_{x_0 y_0}^{xy} (u\,dx - v\,dy) + i\int_{x_0 y_0}^{xy} (v\,dx + u\,dy) = \mathrm{P} + i\mathrm{Q}$$

résultent les égalités

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} = u, \qquad \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} = -v, \qquad \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} = v, \qquad \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y} = u;$$

dès lors, la fonction $\mathrm{P} + i\mathrm{Q}$ a bien *une dérivée unique*.

Remarque. — Cette dérivée $\dfrac{d\mathrm{P} + i\,d\mathrm{Q}}{dx + i\,dy}$ peut s'obtenir, par exemple, en supposant dy nul. Elle a donc pour valeur

$$\frac{\left(\dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} + i\dfrac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}\right)dx}{dx} \quad \text{ou} \quad u + iv.$$

165. La formule du *changement de variable* est la même que pour les intégrales réelles.

Soit à effectuer la substitution $z = \varphi(\zeta)$, $\varphi(\zeta)$ désignant une fonction uniforme et continue, ainsi que sa dérivée, le long des lignes Γ transformées des lignes d'intégration C décrites par z.

Choisissons sur l'arc Γ des points de division ζ_i (soient z_i les points correspondants de C), tels que, ε étant un nombre positif arbitraire donné, l'inégalité $|\zeta_{i+1} - \zeta_i| < \delta$ entraîne

$$z_{i+1} - z_i = (\zeta_{i+1} - \zeta_i)[\varphi'(\zeta_i) + \varepsilon_i] \qquad (|\varepsilon_i| < \varepsilon) \quad (^1).$$

Le premier membre de l'égalité

$$\sum f(z_i)(z_{i+1} - z_i) = \sum \{f[\varphi(\zeta_i)](\zeta_{i+1} - \zeta_i)[\varphi'(\zeta_i) + \varepsilon_i]\}$$

a pour limite l'intégrale à transformer. Le second se sépare en deux parties : l'une a pour limite une intégrale prise le long de Γ; le module de l'autre descend au-dessous de tout nombre donné, puisqu'il n'atteint pas $M\Gamma\varepsilon$, en désignant par M le maximum de $|f(z)|$ le long de Γ, et par Γ la longueur de cette ligne. D'où la formule

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = \int_{\zeta_0}^{\zeta} f[\varphi(\zeta)]\,\varphi'(\zeta)\,d\zeta.$$

166. La règle donnée par Leibniz pour la *dérivation d'une intégrale par rapport à un paramètre* s'étend aux intégrales de variables complexes, puisqu'elles se ramènent à des intégrales curvilignes, et dès lors à des intégrales rectilignes (on suppose l'intégrale prise le long d'un arc qui ne change pas, quand le paramètre varie).

Voici un raisonnement direct.

Soit $f(z, w)$ une fonction de deux variables, holomorphe dans un champ double $(A, \mathcal{A})$ frontière comprise; j'appelle $F(w)$ l'intégrale de cette fonction, le long d'un arc fini de courbe rectifiable C, intérieur à A.

---

(1) En vertu de ces égalités, l'existence d'une limite pour $\sum |\zeta_i - \zeta_{i-1}|$ entraîne l'existence d'une limite pour $\sum |z_i - z_{i-1}|$, car ε est arbitraire et $\varphi'(\zeta)$ est borné. Par suite, si les lignes Γ sont rectifiables, il en est de même des lignes C. Dès lors, la démonstration exige seulement que les lignes Γ soient *rectifiables*.

A un accroissement h donné à w (tel que $w+h$ ne sorte pas de $\mathcal{A}$) correspond pour l'intégrale un accroissement

$$F(w+h)-F(w)=\int_C [f(z,w+h)-f(z,w)]\,dz.$$

La fonction holomorphe f admettant des dérivées partielles holomorphes, $\frac{\partial f}{\partial w}$ est fonction continue de z et de w; dès lors, la différence

$$\frac{f(z,w+h)-f(z,w)}{h}-\frac{\partial f(z,w)}{\partial w}=\eta(z,w,h)$$

tend uniformément vers zéro avec h [1]. A tout nombre positif

---

[1] Quand une fonction réelle $f(\alpha)$ a une dérivée *continue* dans un intervalle fermé $(\alpha_0\alpha_1)$, la différence

$$(1)\qquad \frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}-f'(\alpha)=f'(\alpha+\theta h)-f'(\alpha)$$

converge uniformément vers zéro avec h (p. 35), puisque la continuité de $f'(\alpha)$ dans l'intervalle $(\alpha_0\alpha_1)$ entraîne sa continuité uniforme.

De même, la formule des accroissements finis donne

$$\frac{f(x,\alpha+h)-f(x,\alpha)}{h}-f'_\alpha(x,\alpha)=f'_\alpha(x,\alpha+\theta\Delta\alpha)-f'_\alpha(x,\alpha);$$

Par suite, si $f'_\alpha(x,\alpha)$ est fonction continue de x et de α, ces deux expressions convergent uniformément vers zéro (p. 46) dans un ensemble (x,α) défini par les inégalités $x_0\lesseqgtr x\lesseqgtr x_1$, $\alpha_0\lesseqgtr\alpha\lesseqgtr\alpha_1$.

Passons aux variables complexes. Soit $f(w)=\varphi(u,v)+i\psi(u,v)$ une fonction holomorphe dans une aire et sur sa frontière; quand la variable $w=u+iv$ reçoit un accroissement $h=k+il$, la *différence*

$$(2)\qquad \frac{f(w+h)-f(w)}{h}-f'(w)$$

tend uniformément *vers zéro en même temps que h, dans l'aire considérée.*

En effet, la combinaison f étant holomorphe, les fonctions φ et ψ ont des dérivées continues, et l'on peut écrire (p. 50)

$$f(w+h)-f(w)=(\varphi'_u+i\psi'_u)(k+il)+\varepsilon_1 k-\varepsilon_2 l+i(\varepsilon_1 l+\varepsilon_2 k),$$

ε_1, ε_2 pouvant descendre au-dessous de tout nombre positif donné ε, quel que soit le point (u,v), si $|h|$ reste inférieur à un nombre fixe. Dès lors le module de l'expression (2) n'atteindra pas 4ε.

Pour étendre le raisonnement au cas étudié dans le texte, on écrira la fonction $f(z,w)$ sous la forme $\varphi(x,y,u,v)+i\psi(x,y,u,v)$ (n° 319).

donné ε correspond un nombre positif δ tel que l'on ait, dans tout le domaine (z, w), $|\eta| < \varepsilon$ pour $|h| < \delta$. On en déduit, en appelant C la longueur de la ligne d'intégration,

$$\left| \frac{F(w+h) - F(w)}{h} - \int_C \frac{\partial f}{\partial w} dz \right| < \varepsilon C,$$

et finalement

$$\frac{\partial}{\partial w} \int_C f(z, w)\, dz = \int_C \frac{\partial f(z, w)}{\partial w} dz.$$

Ainsi, on peut permuter les symboles de dérivation et d'intégration.

§ II. — Les intégrales de Cauchy.

167. Soient $u(x,y)$ et $v(x,y)$ deux fonctions de variables réelles, *uniformes et continues, ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre,* dans un domaine continu $\mathfrak{D}$, à connexion simple ou multiple, et sur sa frontière C [1]. Une formule dite *de Riemann* (*Œuvres,* trad., p. 13), cas particulier de celle de Green, donne

$$(1) \qquad \iint_{(\mathfrak{D})} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx\, dy = \int_C u\, dx + v\, dy.$$

L'intégrale double est étendue au domaine $\mathfrak{D}$, et l'intégrale curviligne est prise dans le sens positif [sens des flèches (*fig.* 28)] le long de C.

En effet, supposons d'abord le domaine $\mathfrak{D}$ simplement connexe et tel que sa frontière soit coupée seulement en deux points par des parallèles aux axes. La relation s'obtient en remarquant que l'on calcule une intégrale double en faisant successivement deux

---

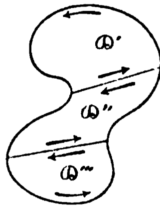
(1) Il suffit de supposer cette frontière formée de contours *fermés simples* (dans ce qui va suivre, nous entendrons par là des courbes continues dont les points extrêmes coïncident et dont tous les autres points sont distincts), extérieurs les uns aux autres, tous intérieurs à un contour de même nature, tous rectifiables.

Néanmoins, pour simplifier la démonstration, nous prenons le cas où C peut être divisé en un nombre fini de parties, ayant respectivement des équations de la forme $y = f(x)$, $f(x)$ désignant une fonction continue qui n'a pas une infinité de maxima et de minima.

intégrations, et que la première s'effectue immédiatement quand la fonction à intégrer est la dérivée partielle par rapport à x ou à y d'une fonction connue.

Pour étendre la formule aux domaines quelconques à connexion simple, on les décompose par des transversales en domaines $\mathcal{D}'$, $\mathcal{D}''$, $\mathcal{D}'''$ satisfaisant chacun à la condition énoncée (*fig.* 27). De

Fig. 27.



même par l'addition de cloisons, un domaine $\mathcal{D}$ à connexion multiple se ramène à un domaine $\mathcal{D}_1$ simplement connexe (*fig.* 28 et 29). Dans les deux cas, lorsqu'on applique la formule (1) aux

Fig. 28.

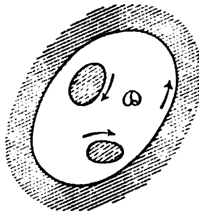
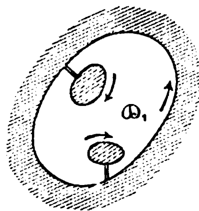


Fig. 29.



domaines $\mathcal{D}'$, $\mathcal{D}''$, $\mathcal{D}'''$ ou au domaine $\mathcal{D}_1$, les intégrales doubles étendues aux aires intérieures s'ajoutent, et les intégrales curvilignes prises le long des cloisons auxiliaires parcourues deux fois en sens inverses se détruisent.

Cauchy en a déduit ce théorème [1] :

La condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale de la fonction considérée le long de la frontière du domaine $\mathcal{D}$

---

[1] Longtemps auparavant, d'Alembert (*Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides*, 1752) avait été amené, pour étudier les composantes de la vitesse dans un tourbillon, à introduire les fonctions $u\,dx - v\,dy$, $v\,dx + u\,dy$, et à y déterminer u et v de manière à avoir des différentielles exactes.

ou de tout domaine intérieur soit nulle, est qu'en tout point intérieur au domaine on ait

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2}$$

En effet, la condition est évidemment suffisante. Elle est nécessaire; sinon, on pourrait trouver, à l'intérieur de $\mathfrak{D}$, un domaine simplement connexe δ, de frontière γ, dans lequel la fonction continue $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ conserverait un signe constant; et par suite, en vertu de la formule (1), l'intégrale curviligne prise le long de γ ne serait pas égale à zéro ([1]).

Cette proposition fondamentale permet de décider dans quel cas l'intégrale curviligne

$$\int_{x_0 y_0}^{xy} u\,dx + v\,dy$$

([1]) On peut donner aux théorèmes de Green et de Cauchy un énoncé plus large.

1° Pour que la formule (1) soit valable, aucune hypothèse sur la continuité ou même l'intégrabilité des dérivées du premier ordre n'est nécessaire : il suffit que les fonctions u et v soient uniformes et continues dans $\mathfrak{D}$ et sur C, que leurs dérivées $\frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ soient uniformes et bornées, enfin que les intégrales doubles $\iint \frac{\partial v}{\partial x}\,dx\,dy$ et $\iint \frac{\partial u}{\partial y}\,dx\,dy$ étendues au domaine $\mathfrak{D}$ existent.

En effet, prenons d'abord comme contour d'intégration un rectangle R ayant pour sommets opposés $(x_0 y_0)$, (xy).

L'existence de l'intégrale double entraîne l'existence de $\int_{x_0}^{x} \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\,dx$ pour un ensemble de valeurs y' de y partout dense dans l'intervalle $(y_0 y)$ (p. 262); on a donc

$$\overline{\int_{x_0}^{x}} \frac{\partial v(x,y')}{\partial x}\,dx = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial v(x,y')}{\partial x}\,dx = v(x,y') - v(x_0,y').$$

Elle entraîne aussi l'intégrabilité par rapport à y de la fonction $\overline{\int_{x_0}^{x}} \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\,dx$ dans l'intervalle $(y_0 y)$; et par suite, comme cette fonction coïncide avec $v(x,y) - v(x_0,y)$ au moins pour des valeurs de y formant un ensemble partout dense dans l'intervalle $(y_0 y)$, on a bien

$$\left\{\begin{aligned} &\int_{y_0}^{y} dy \overline{\int_{x_0}^{x}} \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\,dx \\ &= \int_{y_0}^{y} [v(x,y) - v(x_0,y)]\,dy = \iint_R \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\,dx\,dy. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

En traitant de la même manière la seconde intégrale double et en combinant les

prise le long d'une courbe *intérieure* au domaine $\mathcal{D}$, entre deux limites $(x_0 y_0)$, $(x y)$ fixées arbitrairement, dépend du chemin qui les relie.

Si l'on considère des chemins pouvant être ramenés les uns aux autres par déformation continue sans sortir du domaine, il faut et il suffit, pour que l'intégrale curviligne ait une valeur indépendante du chemin, que la relation (2) soit identiquement satisfaite.

Le même problème se pose pour les intégrales entre des limites imaginaires, puisque ce sont des intégrales curvilignes associées. Cherchons donc si la fonction

$$w(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$$

varie quand la ligne d'intégration se déplace dans un domaine $\mathcal{D}$ que nous supposons d'abord simplement connexe [1]. En d'autres termes, examinons si la fonction $w(z)$ est uniforme dans ce do-

---

résultats, la formule de Green se trouve démontrée pour le rectangle, et dès lors, par une extension facile, pour le domaine $\mathcal{D}$.

Cf. PRINGSHEIM, *C. R. de l'Ac. de Munich*, 1899, p. 52.

2° Pour déduire de la seconde des équations (3) et de l'équation analogue relative à u la formule (qui revient à celle de Cauchy)

$$\int_C u\,dx + v\,dy = 0, \tag{4}$$

il suffit d'ajouter aux hypothèses précédentes que les points où $\left|\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right|$ surpasse un nombre ε, si petit soit-il, forment un ensemble δ à deux dimensions non étendu, puisque les intégrales doubles d'élément $\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy$ relatives à chacun des ensembles δ et $\mathcal{D} - \delta$ tendent alors vers zéro.

Mais le raisonnement fait plus haut montre que la première des équations (3) (combinée avec l'équation analogue relative à u) suffit, *sans la formule de Green et sans la considération des intégrales doubles* qui y figurent, pour obtenir la relation (4). Ainsi cette formule (4) exige seulement que les intégrales $\int dy \int \frac{\partial v}{\partial x} dx$, $\int dy \int \frac{\partial u}{\partial y} dx$ existent, que l'on puisse intervertir dans cette dernière expression l'ordre des intégrations, et que les points où $\left|\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right|$ surpasse ε forment un ensemble à deux dimensions non étendu.

[1] En considérant la valeur d'une fonction en un point *comme pouvant dépendre du chemin suivi par la variable* pour y parvenir, Cauchy a résolu des difficultés qui longtemps avaient arrêté les géomètres : par exemple, il a pu expliquer la multiplicité des valeurs du logarithme, de l'arc sinus, des intégrales des fonctions rationnelles et algébriques (*voir* t. II).

maine, ou encore si l'intégrale le long d'un contour fermé simple arbitraire, intérieur au domaine, est nulle.

Une intégration directe peut trancher la question, quand on a sous le signe d'intégration une différentielle exacte. Ainsi, le long d'une courbe fermée ayant l'origine à son intérieur, l'intégrale

$$I = \int z^{a-1}\,dz$$

est nulle si a est un entier différent de zéro ([1]). Dans le cas général, la solution repose sur le théorème de Cauchy.

168. Théorème fondamental. — *Le long d'une ligne fermée simple intérieure à un domaine simplement connexe, l'intégrale d'une fonction,* holomorphe dans ce domaine, *est nulle.*

Démonstration de Cauchy-Riemann. — Soit

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

la fonction donnée. Le long de toute ligne C, on a par définition

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C (u\,dx - v\,dy) + i\int_C (u\,dy + v\,dx).$$

D'après les propriétés des intégrales curvilignes, et les hypothèses de continuité relatives à u, v et leurs dérivées, pour que le second membre soit nul quel que soit le contour fermé simple C, il faut et il suffit que l'on ait en tout point du domaine

$$\text{(II)} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Ici, ces conditions sont vérifiées : l'intégrale est donc nulle ([2]).

([1]) Si a n'est pas entier, l'étude de l'intégrale I le long d'un cercle de rayon r revient à celle de la variation de z^a, lorsque l'argument de z augmente de 2π, par exemple varie de $\theta_0 - \pi$ à $\theta_0 + \pi$. On a ainsi

$$a\mathrm{I} = r^a\left(e^{ia(\theta_0+\pi)} - e^{ia(\theta_0-\pi)}\right) = 2\,ir^a e^{ia\theta_0}\sin a\pi.$$

Non seulement sa valeur n'est pas nulle, mais elle dépend du rayon du cercle et du point d'où l'on est parti pour le décrire.

([2]) Prenons le cas où les fonctions u et v sont uniformes et continues, et ont des dérivées partielles du premier ordre uniformes et bornées. D'après les remarques faites (p. 273), pour que le théorème de Cauchy soit valable, il suffit

Démonstration de M. Goursat. — Elle repose simplement sur la notion de dérivée d'une fonction $f(z)$ (p. 52), et n'exige plus d'hypothèse relative à la *continuité* de $f'(z)$ ([1]).

Considérons une aire $\mathcal{A}$ limitée par un contour ayant une *longueur finie* C, et une fonction $f(z)$ continue, uniforme et ayant une dérivée dans l'aire $\mathcal{A}$, frontière comprise.

1° $f(z)$ est uniforme; dès lors, si, par un procédé quelconque, par exemple au moyen de droites équidistantes parallèles aux axes, on partage l'aire $\mathcal{A}$ en éléments a_i (dont nous désignerons les contours par c_i), l'intégrale $\int f(z)\,dz$ a même valeur, qu'on la prenne le long de C dans le sens positif, ou bien dans le même sens le long de tous les contours c_i (les intégrales prises le long de celles des lignes c_i qui ne font pas partie de C se détruisent).

---

que les intégrales superposées dont nous avons parlé existent, qu'on puisse changer dans l'une d'elles l'ordre des intégrations, et que les points où $\left|\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right|$ et $\left|\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right|$ surpassent un nombre arbitraire donné à l'avance forment un ensemble non étendu. Dans la démonstration ainsi présentée, *aucune condition de continuité relative aux dérivées* n'est plus requise; une condition d'intégrabilité est exigée.

([1]) *A. M.*, t. IV, p. 197; 1884, et *Transactions of the American math. Soc.*, t. I, p. 14; 1900. M. Pringsheim a rendu plus rigoureux certains détails de cette preuve. (Même Revue, t. II, p. 413; 1901.)

Admettons l'existence et la continuité de $f(z)$ et l'existence de $f'(z)$.

Les démonstrations antérieures (*voir* p. 278) supposaient soit la continuité de $f'(z)$, soit, *ce qui revient au même* (Pringsheim, *Mém. de l'Ac. de Munich*, 1895, p. 303), que $\left|\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} - f'(z)\right|$ tend *uniformément* vers o, pour toutes les valeurs de Δz inférieures à un nombre fixe, *dans tout le domaine* $\mathcal{A}$ (sauf peut-être en des points formant un ensemble non étendu). Ici on s'affranchit de cette hypothèse explicite.

Comme la formule de Cauchy (n° 170), avec ses conséquences, découle de ce théorème, il suffit, pour édifier la théorie des fonctions analytiques, de regarder comme holomorphes les fonctions $f(z)$ qui sont *uniformes et continues, et ont une dérivée.*

Nous avons vu (p. 49, note) que, pour qu'une fonction continue $u+iv$ ait une dérivée, certaines conditions sont requises, en dehors de l'existence des dérivées partielles de u et de v, et des relations (H). Rappelons aussi qu'au sens de la théorie des fonctions analytiques, une expression $f(z)$ est regardée comme fonction de z seulement lorsque $[f(z+\Delta z)-f(z)] : \Delta z$ a une limite finie $f'(z)$, la même quand Δx et Δy tendent vers o *indépendamment l'un de l'autre*, ou bien lorsque dans l'ensemble $-\pi \leqq \theta \leqq \pi$ le rapport $[f(z+\rho e^{i\theta})-f(z)] : \rho e^{i\theta}$ tend *uniformément* vers $f'(z)$, quand ρ tend vers o (p. 47, note). La définition même de Riemann (p. 49, texte) est *trop large*, quand $f'(z)$ n'est pas continue.

Cette conclusion subsiste, que l'on ait découpé l'aire $\mathcal{A}$ en éléments à l'aide de carrés *tous égaux entre eux,* ou bien que l'on se soit astreint à ne pas subdiviser certains carrés, de telle sorte qu'à côté d'un carré il y en ait d'autres de même surface partagés en 4, 7, 10, 13, 16, ... parties.

2° Remarquons aussi que l'on peut pousser assez loin la division de $\mathcal{A}$ en aires partielles d'un seul tenant a_i pour que l'on ait, relativement à chacune d'elles,

$$(1) \qquad |f(z)-f(z_i)-(z-z_i)f'(z_i)| \leqq |z-z_i|\,\varepsilon,$$

ε désignant un nombre arbitraire donné à l'avance, z l'affixe d'un point *quelconque* de c_i, et z_i l'affixe d'un point fixe convenablement choisi dans a_i ou sur c_i.

Pour le prouver, partons d'une division arbitraire du plan en carrés, et considérons ceux d'entre eux qui contiennent au moins un point de l'aire $\mathcal{A}$. Les aires a_i correspondantes peuvent être réparties en deux catégories, suivant qu'elles satisfont ou non à la condition (1). Nous affranchirons de toute subdivision ultérieure les carrés du premier type. Partageons chacune des autres en 4 parties égales, à nouveau en 4 parties égales, etc., en ayant soin, après chaque opération, de mettre à part parmi les carrés obtenus ceux pour lesquels l'aire a_i correspondante satisfait à la condition (1) pour les exclure de tout partage ultérieur. Après un nombre fini d'opérations, les conditions de l'énoncé seront réalisées.

En effet, si une aire α_1 ne satisfaisait pas à la condition (1) et ne pouvait être divisée en parties qui y satisfont, on pourrait trouver une suite indéfinie d'aires $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ (toutes intérieures les unes aux autres et comprises entre des droites dont l'écart tendrait vers zéro), qui ne satisferaient pas à la condition (1) : soit z_0 le *point limite* que les subdivisions de l'aire $\mathcal{A}$ amèneraient ainsi à définir (*voir* p. 39). Ce point z_0 est intérieur à $\mathcal{A}$ ou sur C.

Au point z_0, la fonction continue $f(z)$ admet une dérivée : c'est-à-dire qu'à tout nombre positif donné ε on peut faire correspondre un nombre positif δ tel que l'inégalité $|h| < \delta$ entraîne

$$(2) \qquad |f(z_0+h)-f(z_0)-hf'(z_0)| \leqq |h|\,\varepsilon.$$

En effectuant les partages, on peut s'arrêter seulement à des aires assez petites pour que tous les points du contour d'une aire α_n, qui renferme le point z_0 à son intérieur ou sur sa frontière, soient intérieurs au cercle $|z - z_0| = \delta$. Dès lors l'inégalité (2) est en contradiction avec l'hypothèse d'après laquelle on ne pouvait trouver, dans l'aire α_n ou sur sa frontière, de point où l'inégalité (1) fût satisfaite ([1]).

Ces lemmes posés, imaginons l'aire $\mathcal{A}$ divisée en éléments a_i satisfaisant chacun, pour un point z_i de l'aire a_i ou de son contour c_i, aux conditions (1) et tels qu'il n'y en ait qu'un dans chaque carré. Aux divers points de c_i, la fonction $f(z)$ peut se mettre sous la forme

$$f(z) = f(z_i) + (z - z_i) f'(z_i) + (z - z_i)\,\eta(z),$$

η ayant son module inférieur à un nombre arbitraire ε, le même pour toutes les aires a_i. Par suite, l'intégrale $\int_{c_i} f(z)\,dz$ se décompose en trois parties

$$[f(z_i) - z_i f'(z_i)] \int_{c_i} dz, \quad f'(z_i) \int_{c_i} z\,dz, \quad \int_{c_i} (z - z_i)\eta\,dz.$$

Les deux premières sont nulles ([2]). Dans la dernière, $|z - z_i|$ ne dépasse pas $l_i\sqrt{2}$, l_i désignant le côté du carré qui correspond

---

([1]) Le raisonnement va supposer que le contour C peut être divisé en un nombre fini de parties n'ayant chacune dans la direction des deux axes qu'un nombre fini de maxima et de minima : on peut alors trouver des carrés assez petits pour que leurs périmètres, et ceux des carrés que l'on en déduit par subdivisions ultérieures, ne rencontrent C qu'en deux points. Dès lors, tout carré, même situé sur les bords, finira par ne plus contenir qu'*un seul* fragment a_i de l'aire $\mathcal{A}$. (Il serait facile d'adapter le raisonnement au cas où il n'en renferme qu'*un nombre fini*.) Pour passer de là au cas où C est seulement rectifiable, on peut remarquer que le théorème est vrai pour le triangle, et l'étendre par des considérations de limite aux contours rectifiables quelconques (*cf.* aussi PRINGSHEIM, *Transactions, etc.*, 1902, p. 417).

([2]) On le voit en appliquant la définition même de l'intégrale. Divisons la ligne c_i aux points $z_0, \ldots, z_\nu, \ldots, z_n$ ($z_n = z_0$) et prenons pour valeur de z dans l'intervalle $(z_\nu z_{\nu+1})$ la moyenne de ses valeurs aux extrémités de l'intervalle. Il vient

$$\int_{c_i} z\,dz = \lim_{n=\infty} \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{z_{\nu+1}^2 - z_\nu^2}{2} = 0.$$

à l'élément a_i; le module de la troisième intégrale ne dépasse donc pas

$$\varepsilon l_i \sqrt{2} \int_{c_i} |dz|.$$

Les contours c_i sont formés, les uns uniquement de segments parallèles aux axes, les autres partie de segments rectilignes et partie d'arcs appartenant au contour C; ils ont donc pour périmètres ou bien $4l_i$, ou bien un nombre inférieur à $4l_i + \gamma_i$, γ_i désignant la longueur de la portion de C faisant partie de c_i. Par suite, en opérant de la même manière pour chacune des n aires a_i dans lesquelles on a partagé l'aire $\mathcal{A}$, il vient

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} \int_{c_i} f(z)\,dz\right| \overline{\overline{<}} \varepsilon\sqrt{2} \sum_{i=1}^{n} (4l_i^2 + l_i\gamma_i).$$

Soit A l'aire d'une surface assez étendue pour renfermer à son intérieur tous les carrés ayant au moins un point commun avec l'aire $\mathcal{A}$, et par suite supérieure à $\sum l_i^2$. On a

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| < \varepsilon\sqrt{2}(4\mathrm{A} + \mathrm{C}l),$$

l désignant la limite supérieure des l_i.

Le second membre, produit d'un facteur borné par un nombre ε qui tend vers zéro, tend lui-même vers zéro. Donc le premier membre, qui a une valeur fixe, est rigoureusement nul ([1]).

([1]) Cauchy a donné de son théorème deux démonstrations.

L'une s'appuie sur des *considérations infinitésimales* : « ... La démonstration repose sur cette seule observation que la *variation* de l'intégrale est nulle, ce qu'on pouvait prévoir d'après les principes du calcul des variations ... », lorsqu'on change infiniment peu le chemin d'intégration. (Cauchy, *Mémoires sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires*, 1825, p. 6.) *Cf.* Picard, *Analyse*, 2ᵉ édit., t. I, p. 86.

On peut y rattacher la démonstration de Briot et Bouquet (*Fonctions elliptiques*, 2ᵉ édit., 1875, p. 128), celle de M. Mittag-Leffler, qui repose sur la même idée fondamentale que celle de Briot et Bouquet (*Göttinger Nachrichten*, 1875, p. 65), et surtout celle de M. Falk. Dans cette dernière, comme dans la méthode des variations, on considère une famille de courbes $z = \varphi(t, \rho) + i\psi(t, \rho)$, passant, quel que soit le paramètre ρ, par deux points z_0 et z_1 : on évalue l'intégrale $\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz$ le long d'une courbe de la famille, et l'on vérifie que *sa valeur est indépendante de* ρ *en constatant que la dérivée par rapport à ce paramètre*

169. *Corollaire.* — Le théorème s'étend aux aires à connexion *multiple* : l'intégrale le long de la frontière, parcourue dans le

---

est nulle. On voit ensuite que sa valeur constante est zéro (*Nova Acta regiæ Soc. Sc. Upsaliensis,* 1884, et *B. D.*, 1883, p. 137).

La seconde repose sur la *transformation d'intégrales doubles* que nous avons donnée (CAUCHY, *C. R.*, 1846; *Œuvres*, 1re série, t. X, p. 74) : plus connue sous le nom de *méthode de Riemann* (1851; *Œuvres*, trad. Laugel, p. 16), elle a été rendue plus rigoureuse par Kronecker (*Mém. de l'Ac. de Berlin,* 1885, p. 785).

Comme autres preuves, citons celles de Malmsten [*Svenska Vetenskaps.* (*Academiens Hanlingar,* 1865)], de M. Jordan, de M. Pringsheim.

La démonstration de M. Jordan (*Analyse,* 2e édit., t. I, p. 185) a pour la première fois bien mis en évidence que le théorème est valable dès que les lignes d'intégration sont *rectifiables*. M. Pringsheim parvient aux conditions pour qu'une intégrale curviligne soit indépendante du chemin, et par suite au théorème de Cauchy, en introduisant des intégrales dites *en escalier,* c'est-à-dire prises le long de segments dont les côtés sont parallèles aux axes : les conditions qu'il impose aux lignes d'intégration ne sont satisfaites que dans les lignes rectifiables (*Mém. de l'Ac. de Munich,* 1895).

Cf. aussi DILLNER, *Nova Acta r. Soc. Sc. Upsaliensis,* 1885. — BOCHER, *Bulletin of the American math. Soc.*, 1896, p. 146. — MOORE, *Transact. of the American math. Soc.*, 1900, p. 502.

Remarque. — Pour que l'on puisse prendre comme contour d'intégration la *frontière* du domaine où la fonction est holomorphe, il suffit que la fonction soit *bien déterminée* sur cette frontière. Expliquons le sens *spécial* donné ici à ce mot.

Soit une fonction $f(z)$ uniforme et continue à l'intérieur d'un domaine $\mathcal{A}$, limité par une courbe C.

Si à tout point ζ, situé sur une portion γ du contour C, correspond un chemin aboutissant en ζ et variant d'une manière continue quand ζ se déplace d'une façon continue sur γ, tel que par ce chemin la fonction $f(z)$ tende uniformément vers une valeur $f_1(\zeta)$ (le mot *uniformément* se rapportant aux divers points ζ de γ), alors $f(z)$ *tend uniformément vers* $f_1(\zeta)$, *quand* z *se rapproche de* ζ *par un chemin quelconque, et* $f_1(\zeta)$ *est fonction continue de* ζ *le long de l'arc* γ.

Réciproquement, si, quel que soit le chemin suivi par z pour se rapprocher de ζ, la fonction $f(z)$ tend vers une même valeur $f_1(\zeta)$, alors $f_1(\zeta)$ *est une fonction continue le long de l'arc* γ, *et* $f(z)$ *tend uniformément vers* $f_1(\zeta)$.

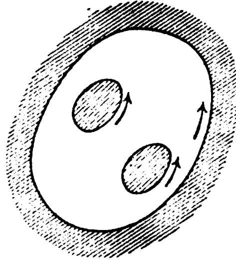
Dans ces deux cas, équivalents entre eux, on dit que la fonction est *bien déterminée* le long de γ.

La démonstration de ces lemmes ressort immédiatement de la théorie de la continuité (on les trouvera établis dans la Thèse de M. Painlevé, *A. T.*, 1888, B., p. 19) et ils apprennent spécialement qu'une fonction bien déterminée sur la frontière d'un domaine est continue dans ce domaine et sur sa frontière.

Ces lemmes admis, on voit que dans l'application du théorème de Cauchy on peut prendre pour contour d'intégration une partie γ de la *frontière* du domaine si la fonction y est bien déterminée. En effet, le long de γ la fonction est continue, donc intégrable; son intégrale le long de γ diffère aussi peu que l'on veut de son intégrale le long d'une courbe voisine intérieure à $\mathcal{A}$, puisque $f(z)$ converge uniformément vers $f_1(\zeta)$ (PAINLEVÉ, *loc. cit.*, p. 23).

sens positif (*fig.* 27), est nulle; ou encore, l'intégrale relative au contour extérieur est égale à la somme des intégrales le long des contours intérieurs [en supposant les contours parcourus dans le sens des flèches (*fig.* 30)].

Fig. 30.



Il conduit à deux représentations des fonctions analytiques d'une extrême généralité, l'une au moyen d'une intégrale (l'intégrale de Cauchy), l'autre par une série de puissances (la série de Cauchy-Taylor). A leur tour, elles permettent d'établir facilement les principales propriétés de ces fonctions. C'est ainsi que *d'un théorème unique découle toute la théorie des fonctions analytiques.*

170. *Intégrale de Cauchy.* — Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans un domaine $\mathcal{D}$ à connexion simple ou multiple, et C un contour fermé arbitraire, limitant une aire intérieure à $\mathcal{D}$ [1]. *La valeur de la fonction en tout point a situé à l'intérieur du contour* C *s'exprime au moyen des valeurs de la fonction le long du contour* C [2].

---

[1] Le contour C peut coïncider avec la frontière du domaine où la fonction est holomorphe, si sur cette frontière la fonction est *bien déterminée* et même si elle cesse de l'être en des points ne formant pas un ensemble linéaire, pourvu que dans le voisinage de ces points le module de la fonction vérifie certaines conditions, par exemple n'augmente pas indéfiniment (p. 279, note).

Si l'on sait seulement que la fonction est holomorphe dans le domaine, l'intégrale doit être prise le long d'une courbe aussi rapprochée que l'on veut de la frontière du domaine, mais *à son intérieur.*

Cette remarque s'applique également aux théorèmes qui vont suivre.

[2] Pour déterminer l'intégrale, il suffit de connaître la fonction aux points d'un ensemble dénombrable partout dense sur C, par exemple aux points de C dont les coordonnées sont rationnelles, et non pas en une infinité non dénombrable de points (*voir* Chap. V).

En effet, de a comme centre, décrivons un cercle γ qui ne sorte pas du contour C. La fonction $\frac{f(z)}{z-a}$ est holomorphe dans l'aire à double contour (C, γ), et l'on a

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz.$$

La première intégrale a une valeur déterminée; donc l'intégrale écrite au second membre est indépendante du rayon ρ du cercle γ. Choisissons-le assez petit pour que, en tout point de sa circonférence, $|f(z)-f(a)|$ soit inférieur à un nombre arbitraire ε donné à l'avance. En ces points z, on pourra poser

$$f(z) = f(a) + \eta \qquad (|\eta| < \varepsilon),$$

et dès lors

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \int_\gamma \frac{f(a)}{z-a}\,dz + \int_\gamma \frac{\eta}{z-a}\,dz.$$

Au second membre, la première intégrale s'obtient en posant $z - a = \rho e^{i\theta}$, ce qui montre qu'elle a pour valeur $2i\pi f(a)$. La seconde intégrale, ayant son module inférieur à $2i\pi\varepsilon$, peut descendre au-dessous de tout nombre donné : par suite, comme elle ne change pas avec ρ, elle est rigoureusement nulle. On a ainsi la formule fondamentale

(3) $$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz \quad [1].$$

---

[1] Prenons pour contour C un cercle de centre a, et posons

$$f(z) = u + iv, \qquad f(a) = \alpha + i\beta, \qquad z - a = \rho e^{i\theta}.$$

Cette formule (3) donne

$$\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\,d\theta, \qquad \beta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v\,d\theta.$$

Ainsi, la partie réelle d'une fonction holomorphe dans un cercle a, au centre de ce cercle, une valeur comprise entre les valeurs maxima et minima de cette partie réelle sur la circonférence de ce cercle. On en conclut, en faisant tendre vers zéro le rayon du cercle, que la partie réelle α d'une fonction holomorphe dans une aire ne peut être maximum ou minimum à l'intérieur de l'aire. Même conclusion pour β. Nous retrouverons ce théorème en parlant des *fonctions harmoniques* (n° 311).

171. *Corollaires :*

I. Une fonction holomorphe dans un domaine a dans ce domaine des dérivées de tous les ordres : par suite, toutes ces dérivées sont holomorphes (*voir* p. 138).

En effet, dans la formule (3) regardons l'intégrale comme une fonction de a. Cette fonction déterminée et continue peut être dérivée par rapport à ce paramètre; on a ainsi

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz.$$

Recommençons le raisonnement en l'appliquant à cette nouvelle relation et à celles que l'on en déduit. La formule générale obtenue

$$f^n(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz,$$

prouve l'existence des dérivées de tous les ordres, et en donne l'expression analytique sous forme d'intégrales.

II. Dans un domaine à connexion simple où une fonction est holomorphe, l'intégrale de cette fonction, le long d'une courbe ouverte intérieure, considérée comme dépendant de sa limite supérieure, est une fonction analytique et uniforme (p. 267 et 274). La réciproque est vraie : une fonction est analytique dans un domaine lorsqu'elle est continue, uniforme, et telle que son intégrale le long de tout contour fermé intérieur au domaine soit nulle.

Cette remarque (¹) permet d'établir la théorie des fonctions analytiques en partant de la considération de *fonctions intégrables* au lieu de celle de *fonctions ayant une dérivée déterminée.*

172. Théorème. — *L'intégrale d'une fonction, analytique et uniforme dans un domaine, prise le long d'une ligne fermée simple intérieure au domaine, est égale au produit de* $2\pi i$ *par*

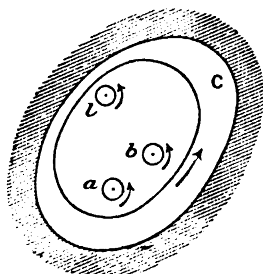
(¹) Elle a été faite par M. Morera (*Rendic. Instit. Lombardo,* 1886, p. 305). *Cf.* aussi Osgood, *Bulletin American M. S.*, 1896, p. 296.

la somme des résidus relatifs aux singularités de la fonction situées à l'intérieur de cette ligne.

Pour l'instant, nous supposerons que toutes les singularités sont des pôles (*voir* p. 59 et n^{os} **252** et **253**).

Entourons chaque pôle d'une circonférence assez petite pour qu'elle ne sorte ni de l'aire considérée, ni du domaine du pôle : la fonction donnée $f(z)$ devient holomorphe dans l'aire à connexion multiple ainsi définie (*fig.* 31). Si l'on désigne par C un contour

Fig. 31.



simple intérieur à l'aire donnée et renfermant les pôles $a, \ldots, l$, et par (C), (a), ..., (l) les intégrales de $f(z)$ prises le long du contour C et des circonférences entourant les pôles, le théorème de Cauchy donne

$$(C) = (a) + (b) + \ldots + (l).$$

Pour évaluer (a), nous remarquons que dans le domaine de a, et par suite sur la circonférence entourant ce point, on a

$$f(z) = \varphi(z) + \sum_{\nu=1}^{p} \frac{A_\nu}{(z-a)^\nu},$$

$\varphi(z)$ étant holomorphe dans le domaine de a.

Ainsi (a) est la somme de trois intégrales

$$\int_a \varphi(z)\,dz, \quad \int_a \frac{A_1}{z-a}\,dz, \quad \sum_{\nu=2}^{p} \int_a \frac{A_\nu}{(z-a)^\nu}\,dz.$$

La première est nulle, puisque $\varphi(z)$ est holomorphe. Il en est

de même de la troisième, car on a sous le signe d'intégration la différentielle d'une fonction analytique uniforme.

En posant $z - a = \rho e^{i\theta}$, et en faisant varier θ de o à 2π, on voit que la seconde a pour valeur $2i\pi A_1$.

Dès lors, si l'on représente par $B_1, \ldots, L_1$ les résidus relatifs aux autres pôles $b, \ldots, l$, il vient

$$(a) = 2i\pi A_1, \quad (b) = 2i\pi B_1, \quad \ldots, \quad (l) = 2i\pi L_1$$

et finalement

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz = A_1 + B_1 + \ldots + L_1.$$

Cette formule généralise celle de la page 281.

173. Prenons la dérivée logarithmique d'une fonction méromorphe $\varphi(z)$.

Un point qui n'est ni racine ni pôle pour cette fonction est un point *ordinaire* pour sa dérivée logarithmique.

Un zéro d'ordre p de la fonction est un pôle simple (de résidu p) de cette dérivée, comme le montrent les égalités

$$\varphi(z) = (z-a)^p g(z) \qquad [g(a) \gtrless 0],$$
$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{p}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Enfin, en vertu des égalités

$$\varphi(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^p}, \qquad \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{-p}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)} \qquad [g(a) \gtrless 0],$$

un pôle d'ordre p de la fonction est pôle simple (de résidu $-p$) de sa dérivée logarithmique.

Cela posé, soit $f(z)$ une fonction, holomorphe dans une aire, et ayant pour racines à son intérieur les nombres $a, b, \ldots$, avec des degrés de multiplicité $\alpha, \beta, \ldots$: ces racines sont isolées (p. 140) et dès lors en nombre limité dans toute aire intérieure à l'aire considérée.

En combinant les remarques précédentes avec le théorème des résidus, nous allons obtenir une troisième proposition due encore à Cauchy.

THÉORÈME. — *Une fonction $f(z)$, holomorphe dans une aire à contour unique, a dans tout contour simple* C *intérieur à cette aire un nombre de racines représenté par l'intégrale*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz,$$

prise dans le sens positif.

En effet, à l'intérieur du contour C, la fonction $\frac{f'(z)}{f(z)}$ est méromorphe et a pour pôles les racines de $f(z)$. Le théorème des résidus donne donc

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = R_a + R_b + \ldots.$$

Les résidus R_a, R_b, ... ont pour valeurs α, β, ...; donc leur somme est bien égale au nombre des racines comptées chacune avec leur degré de multiplicité (1).

---

(1) Voici comment on peut diriger le calcul nécessaire pour l'évaluation de cette intégrale.

Supposons que le contour C soit défini par des équations $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, et qu'il soit parcouru dans le sens positif quand t va en croissant de t_0 à t_1.

Le long du contour, $f(z)$ peut se mettre sous la forme $X(t) + iY(t)$ (nous supposerons que X et Y ne s'annulent pas à la fois). On a, en désignant par $\Phi(t)$ une fonction convenable,

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} d\log(X^2+Y^2) + i\int_{t_0}^{t_1} \frac{\Phi'(t)}{1+\Phi^2(t)}\,dt.$$

Au second membre, la première intégrale est nulle. Appelons I la seconde intégrale.

Pour l'évaluer, nous supposerons la fonction Φ telle que le quotient $\frac{\Phi'(t)}{1+\Phi^2(t)}$ reste fini et continu même dans le voisinage des valeurs pour lesquelles $\Phi(t)$ est infini : l'intégrale I sera continue. Cette condition est remplie si la fonction $\Phi(z)$ est méromorphe dans le voisinage de ces points; dès lors, *a fortiori*, lorsque $f(z)$ se réduit à un polynome et que la courbe C est unicursale.

Désignons, dans tout ce qui suit, par la notation arc tang$\Phi(t)$ un arc compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$; et pour évaluer I, faisons partir t de t_0. Tant que t n'a pas atteint la plus petite valeur τ_1 qui rend infini $\Phi(t)$, on a

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\Phi'(t)}{1+\Phi^2(t)}\,dt = \text{arc tang}\,\Phi(t) - \text{arc tang}\,\Phi(t_0),$$

174. *Corollaires :*

I. Le nombre des racines de $f(z)$ intérieures à C s'obtient en divisant par $2\pi i$ la variation subie par $\log f(z)$, lorsque z décrit le contour C. Posons

$$f(z) = re^{i\theta}, \qquad \log f(z) = \log r + i\theta.$$

Après une circulation de z dans le sens positif le long de C, $\log r$ reprend sa valeur initiale et θ varie d'un multiple entier de 2π. Donc, *il suffit de diviser par* 2π *la variation de l'argument de* $f(z)$ *pour avoir le nombre des racines.*

---

car pour $t = t_0$ les deux membres sont égaux et le second membre est continu jusqu'à la valeur τ_1.

Quand t traverse la valeur τ_1, si $\Phi(t)$ passe de $+\infty$ à $-\infty$, il faut, au delà de τ_1, ajouter π au second membre de la formule précédente; car, en traversant τ_1, l'intégrale reste continue, tandis que, d'après les notations, arc tang $\Phi(t)$ diminue brusquement de π.

De même, pour rétablir la continuité du second membre, il faudrait *en retrancher* π, si $\Phi(t)$ passait de $-\infty$ à $+\infty$, quand t traverse la valeur τ_1.

Il n'y a pas de modification à faire subir au second membre, quand $\Phi(t)$ ne change pas de signe en devenant infini.

Donc, entre τ_1 et la seconde valeur τ_2 de t qui rend la fonction Φ infinie, on aura

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\Phi'(t)}{1+\Phi^2(t)}\,dt = \text{arc tang}\,\Phi(t) - \text{arc tang}\,\Phi(t_0) + \varepsilon\pi \qquad (\varepsilon = 1, -1, 0).$$

Quand t traverse la valeur τ_2, le second membre augmente de $\varepsilon\pi$, ε étant encore égal à $+1$, -1 ou 0, suivant que $\Phi(t)$ passe de $+\infty$ à $-\infty$, de $-\infty$ à $+\infty$, ou ne change pas de signe.

Désignons par n l'excès du nombre de fois où $\Phi(t)$ a passé de $+\infty$ à $-\infty$ sur le nombre de fois où il a passé de $-\infty$ à $+\infty$, quand t varie de t_0 à t_1, et remarquons que, lorsqu'on est revenu au point de départ, les deux déterminations arc tang $\Phi(t_1)$ et arc tang $\Phi(t_0)$ sont identiques.

On en conclut

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\Phi'(t)}{1+\Phi^2(t)}\,dt = n\pi.$$

Le nombre μ des racines intérieures au contour est donc égal à $\frac{n}{2}$.

Cauchy appelait *indice* de la fonction Φ en un point τ_i le nombre ε, et *indice* de la fonction dans l'intervalle $(t_0 t_1)$ le nombre que nous avons représenté par n; il a indiqué des méthodes qui permettent de calculer cet indice par des procédés réguliers, au moins quand la fonction Φ est une fraction rationnelle.

Cf. CAUCHY, *J. E. P.*, XXVe Cahier, p. 176.

Le théorème de d'Alembert en découle ([1]). Écrivons

$$f(z) = a_0 z^m \left(1 + \frac{a_1}{a_0 z} + \ldots + \frac{a_m}{a_0 z^m}\right) = a_0 z^m \varphi(z).$$

De l'origine, traçons un cercle de rayon r assez grand pour que l'on ait

$$\frac{|a_1|}{|a_0 r|} + \ldots + \frac{|a_m|}{|a_0 r^m|} < k < 1,$$

et cherchons la variation de l'argument de $f(z)$ sur ce cercle.

L'argument de z augmentant de 2π, celui de z^m croîtra de $2m\pi$. L'argument de $\varphi(z)$ ne change pas : en effet, d'après la dernière inégalité, on a, *a fortiori*, aux points $|z| = r$,

$$|\varphi(z) - 1| < k < 1,$$

ce qui veut dire que le point $\varphi(z)$ reste intérieur à un cercle décrit du point 1, avec l'unité pour rayon, et dès lors n'entoure pas l'origine. La variation de l'argument de $f(z)$ est donc égale à $2m\pi$; par suite, le polynome a m racines dans le cercle considéré et dans tout cercle de rayon plus grand.

II. Une fonction holomorphe quelconque $\varphi(a)$ d'une racine a de $f(z)$ s'exprime par une intégrale.

En effet, au point a le résidu de la fonction $\frac{f'(z)}{f(z)}$ est l'unité (si la racine est simple); on a donc, par l'application du théorème des résidus à un contour C ayant la seule racine a à son intérieur,

$$\varphi(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \varphi(z)\,\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz.$$

175. Soit $f(z)$ une fonction *méromorphe* à l'intérieur d'un contour simple C : l'*intégrale* déjà considérée

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$

([1]) « Lorsqu'on eut trouvé les formules générales des racines des équations du troisième et du quatrième degré, on remarqua que les racines imaginaires de ces équations se réduisaient, comme celles des équations du second degré, à la forme $p + q\sqrt{-1}$, et l'on fut porté à conclure que les imaginaires de toutes les équations étaient toujours réductibles à la même forme.... D'Alembert, le premier (1746), envisagea cette question d'une manière générale.... » (LAGRANGE, *Œuvres*, édit. Serret, t. VIII, p. 209.)

représente le nombre de ses zéros diminué du nombre de ses pôles (zéros et pôles intérieurs au contour, et comptés avec leurs degrés de multiplicité).

Même démonstration que ci-dessus (p. 285), en utilisant cette fois toutes les remarques qui précèdent le théorème.

On voit de même que l'*intégrale*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C z\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz,$$

prise le long d'un contour simple à l'intérieur duquel la fonction $f(z)$ est méromorphe, *est égale à la somme des zéros de cette fonction diminuée de la somme de ses pôles.*

176. Soient $f(z)$ et $\varphi(z)$ deux fonctions holomorphes dans un domaine ayant pour frontière un contour simple C.

Les équations $f(z) = 0$, $f(z)+\varphi(z) = 0$ *ont le même nombre de racines dans ce domaine si, en tout point de sa frontière,* $\left|\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right|$ *reste inférieur à l'unité.*

En effet, à l'intérieur du domaine, ces équations ont respectivement comme nombres de racines

$$N = \frac{1}{2\pi i}\int_C d[\log f(z)], \qquad N' = \frac{1}{2\pi i}\int_C d\left[\log \overline{f(z)+\varphi(z)}\right].$$

D'où

$$N' - N = \frac{1}{2\pi i}\int_C d\left[\log \overline{1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}}\right].$$

Lorsque z décrit la ligne C, le point $1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}$ n'entoure pas l'origine, puisque $\frac{\varphi(z)}{f(z)}$ ne s'éloigne jamais assez du point 1 pour que son module égale ou surpasse l'unité. Donc la variation du logarithme est nulle : $N' = N$.

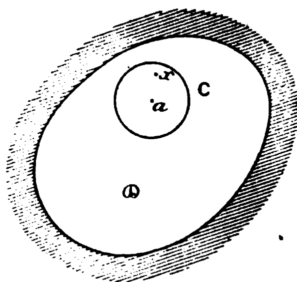
§ III. — Application aux développements de Taylor.

177. Nous arrivons à la propriété capitale de toute fonction holomorphe, à la possibilité de sa représentation par une série de

puissances dans le voisinage de tout point intérieur au domaine $\mathfrak{D}$ dans lequel elle est holomorphe [1].

Une fonction holomorphe dans un domaine $\mathfrak{D}$ est développable suivant les puissances de $x-a$, à l'intérieur de tout cercle C *de centre a ne sortant pas de* $\mathfrak{D}$ (*fig.* 32).

Fig. 32.



Partons de la formule de Cauchy

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-x}\,dz$$

et de l'identité

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{(z-a)-(x-a)} = \frac{1}{z-a} + \frac{x-a}{(z-a)^2} + \ldots$$

$$(|x-a| < |z-a|),$$

en vertu de laquelle la fonction $(z-x)^{-1}$ *admet un développement de la forme indiquée.*

Dans le domaine (x) intérieur au cercle C, cette série considérée comme fonction de z converge *uniformément* sur la circonférence C; si l'on en multiplie les éléments par le facteur borné $f(z)$, l'uniformité de la convergence subsiste. Sous le signe

[1] Le Mémoire de Cauchy fut lu à l'Académie de Turin le 11 octobre 1831. Il est inséré dans les *Exercices d'Anal. et de Phys. math.*, t. II, p. 50 (édit. de 1841). *Cf.* aussi t. I, p. 276 (édit. de 1840).

Pour obtenir ces développements en série, et dès lors justifier l'identité des deux définitions de la fonction holomorphe données respectivement par Cauchy et Weierstrass, il suffit d'avoir démontré le théorème de Cauchy dans le cas simple où le contour d'intégration est une *circonférence de cercle*.

d'intégration, remplaçons $(z-x)^{-1}$ par le développement précédent, et intégrons terme par terme (p. 125); il vient

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz+\frac{x-a}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz+\ldots$$
$$+\frac{(x-a)^n}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz+\ldots$$

C'est la série de Taylor.

Corollaires :

I. Pour donner aux coefficients du développement la forme classique, on part de la relation (p. 282)

$$f^n(a)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz.$$

Le coefficient de $(x-a)^n$ a donc pour valeur $\frac{f^n(a)}{n!}$.

II. Pour $a=0$, on a la série de Mac Laurin ([1]).

([1]) *Soit x réel.* — Une fonction $f(x)$ peut avoir dans l'intervalle $(0, x)$ des dérivées de tous les ordres, sans que la série $F(x)=\sum \frac{1}{n!}f^n(0)x^n$ soit convergente. Convergerait-elle, qu'il peut arriver, contrairement à l'opinion de Lagrange (*Œuvres*, t. IX, p. 65, et t. X, p. 72) qu'elle ne représente pas $f(x)$. Cauchy donne comme exemple les fonctions $f(x)$ et $e^{-\frac{1}{x^2}}+f(x)$ pour lesquelles la série $F(x)$ est la même. Si $f(x)$ est développable en série entière dans le voisinage de l'origine, la seconde fonction ne l'est pas et ne peut être représentée par $F(x)$. C'est l'étude *du reste* de la série qui décide de la légitimité du développement.

En lui donnant la forme de Lagrange, on voit qu'il tend toujours vers zéro lorsque dans l'intervalle $(0, x)$ une dérivée d'ordre quelconque reste inférieure en valeur absolue à un *nombre fixe*.

A la suite de du Bois-Reymond (*M. A.*, t. XXI, p. 109), M. Pringsheim a étudié les conditions *nécessaires et suffisantes* pour que, x_0 étant donné, une fonction uniforme $f(x)$ soit représentée par la série

$$\sum \frac{1}{\nu!}f^\nu(x_0)\,(x-x_0)^\nu$$

pour toute valeur de x dans l'intervalle $x_0 \overline{\gtrless} x < x_0+R$: *il faut et il suffit que dans cet intervalle $f(x)$ soit finie, ait en chaque point des dérivées de tout ordre fini, toutes finies, et que pour toute valeur entière de p* (0 inclus)

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{(n+p)!}f^n(x_0+h)k^n$$

converge uniformément vers 0 dans l'ensemble (h, k) défini par les inégalités $0 \overline{\gtrless} h \overline{\gtrless} h+k \overline{\gtrless} r < R$ (*M. A.*, t. XLIV, p. 68; t. XLII, p. 153). — *Voir* aussi plus haut, p. 30.

Quand la fonction $f(x)$ est holomorphe dans le domaine de l'infini, on en déduit dans ce domaine un développement de la forme

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} + \ldots.$$

III. Deux fonctions, holomorphes dans un domaine $\mathfrak{D}$, *qui ont même valeur ainsi que leurs dérivées de tous les ordres en un point a de* $\mathfrak{D}$, sont représentées par la même série dans le voisinage de a (p. 289), et, par suite, coïncident dans tout son cercle de convergence. Ce premier résultat acquis, on s'en servira pour démontrer l'identité des fonctions dans un second cercle et, de proche en proche, dans tout le domaine $\mathfrak{D}$. [Les procédés de Weierstrass avaient déjà conduit (p. 214) à ce résultat fondamental.]

On peut dire aussi qu'une fonction holomorphe à l'origine est développable d'une seule façon en série entière.

178. D'après la méthode élémentaire connue, pour obtenir les développements de fonctions de variables réelles en séries de Taylor, il faut vérifier la continuité de la fonction et de ses dérivées, trouver une expression *du reste,* et, pour sa discussion, lui donner tantôt la forme de Cauchy, tantôt celle de Lagrange.

Lorsqu'une fonction est définie pour les valeurs réelles et imaginaires de la variable, voici la règle : il faut et il suffit qu'une pareille fonction soit holomorphe dans le voisinage d'un point a pour qu'elle soit développable suivant les puissances de $x - a$: la convergence s'étend aux points intérieurs au cercle de centre a, dont la circonférence passe par la singularité la plus voisine de a.

Ce cercle (soit R son rayon) est le cercle de convergence de la série de Taylor. On peut, en effet, poser

$$|x - a| = r < \rho < R,$$

et prendre pour cercle d'intégration C (p. 289) le cercle de rayon ρ : donc la série converge au moins dans le cercle de rayon R. Elle ne peut converger dans un cercle de rayon plus grand : sinon, la fonction qu'elle définit serait holomorphe sur toute la circonférence du cercle de rayon R, ce qui est contre l'hypothèse.

Ainsi cette méthode de Cauchy donne une valeur du rayon de convergence d'une série entière déduite, non plus de l'étude de la série elle-même et des *valeurs de ses coefficients* (p. 136), mais des *propriétés de la fonction* qu'elle définit ([1]).

Inversement, elle fournit une relation entre le rayon de convergence d'une série de puissances et la position des singularités de la fonction analytique qu'elle représente.

En effet, une *fonction analytique,* holomorphe dans le voisinage d'un point et dès lors développable en série dans un cercle, *a au moins une singularité sur la circonférence de ce cercle,* puisque, dans le cas contraire, elle serait développable en série de puissances dans un cercle de rayon plus grand.

179. Donnons quelques exemples :

Première application : *Développement en séries entières des fonctions* $(1+z)^n$, $\log(1+z)$, $\operatorname{tang} z$, $\operatorname{arc\,sin} z$, $\operatorname{arc\,tang} z$. — Leurs singularités les plus voisines de l'origine sont respectivement les points -1, -1, $\frac{\pi}{2}$, 1, $\pm i$. Les rayons des cercles de convergence seront donc $\frac{\pi}{2}$ pour la troisième fonction, l'unité pour les autres. Sous ces réserves, on pourra écrire

$$(1+z)^n = 1 + \frac{n}{1}z + \frac{n(n-1)}{2!}z^2 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!}z^p + \ldots,$$

$$\log(1+z) = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots + (-1)^{p-1}\frac{z^p}{p} + \ldots,$$

$$\operatorname{tang} z = A_0 z + A_1 z^3 + \ldots + A_p z^{2p+1} + \ldots \quad ([2])$$

$$\left[\frac{1}{2}A_p = \frac{2^{2p+2}}{\pi^{2p+2}}\left(\frac{1}{1^{2p+2}} + \frac{1}{3^{2p+2}} + \frac{1}{5^{2p+2}} + \ldots\right)\right]$$

([1]) L'introduction des *imaginaires* aide à comprendre pourquoi la convergence d'une série de Taylor *réelle* ne dépasse pas une certaine valeur : la théorie des variables réelles ne suffit pas à l'expliquer, puisque la singularité la plus voisine du centre du développement peut être imaginaire.

Mais ce n'est pas seulement au point de vue de l'étendue du domaine de convergence d'une série entière que la considération des valeurs imaginaires de la variable est utile; c'est encore pour son *calcul numérique :* car une limite supérieure du *reste* de la série dépend, d'après les formules des n[os] 139 et 180, des limites supérieures des valeurs de la série sur son cercle de convergence.

([2]) La loi de formation des coefficients se rattache aux nombres dits *de Ber-*

et

$$\text{arc sin } z = \frac{z}{1} + \frac{1}{2}\frac{z^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{z^5}{5} + \ldots + \frac{1.3.5\ldots\overline{2p-1}}{2.4.6\ldots 2p}\frac{z^{2p+1}}{2p+1} + \ldots,$$

$$\text{arc tang } z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \ldots + (-1)^p \frac{z^{2p+1}}{2p+1} + \ldots.$$

Chacune des déterminations du logarithme et des fonctions circulaires inverses est développable en série; les formules ci-dessus se rapportent aux valeurs qui s'annulent avec z.

DEUXIÈME APPLICATION : *Développement de l'irrationnelle*

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}$$

suivant les puissances de z (*x réel*). — Des deux déterminations de la fonction, prenons celle qui se réduit à 1 pour $z = 0$: elle reste holomorphe dans un cercle ayant l'origine pour centre et dont la circonférence passe par celle des racines de l'équation $1 - 2xz + z^2 = 0$, qui est la plus voisine de l'origine. Ces racines sont

$$z = x \pm \sqrt{x^2 - 1} = x \pm i\sqrt{1 - x^2}.$$

Soit $|x| < 1$. Ces racines sont imaginaires; leur module est l'unité : le rayon du cercle de convergence est égal à 1, quel que soit x.

Soit $|x| > 1$. Le rayon du cercle de convergence varie avec x.

Dans les deux cas, le développement a la forme

$$X_0 + X_1 z + \ldots + X_n z^n + \ldots;$$

les coefficients X_n sont les *polynomes de Legendre*.

TROISIÈME APPLICATION : *Développement des racines des équations algébriques* (*et des fonctions qui se comportent comme ces racines*). — Complétons l'étude faite au Chapitre I,

---

noulli. Cf. TANNERY, *Théorie des fonctions d'une variable*, p. 191. — BERTRAND, *Calcul différentiel et intégral*, t. I, p. 305 (on y trouvera d'autres développements, par exemple celui de $z \cot z$), etc. Pour la bibliographie relative aux nombres de Bernoulli, cf. *American Journal*, 1882, p. 228, et *Encyklopädie der Math. Wiss.*, t. II, p. 181.

en donnant l'expression analytique, dans le domaine d'un point arbitraire a, d'une racine quelconque w_i ayant en ce point la valeur b.

1° *Le point a est un point ordinaire pour la racine w_i.*

Cette racine est alors holomorphe dans un domaine de a : dans ce domaine, on peut écrire

$$w_i = b + \alpha_1(z-a) + \ldots + \alpha_n(z-a)^n + \ldots.$$

2° *Autour de a, p racines $w_1, \ldots, w_p$ se permutent* (dans l'ordre des indices).

Posons $(z-a) = z'^p$. z' entoure une fois l'origine quand z entoure p fois le point a : aussi, chaque racine $w_1, \ldots, w_p$ est fonction holomorphe de z'. Écrivons leurs développements suivant les puissances de z' ; on en déduira

$$w_1 = b + \alpha_1(z-a)^{\frac{1}{p}} + \alpha_2(z-a)^{\frac{2}{p}} + \ldots,$$
$$w_2 = b + \beta_1(z-a)^{\frac{1}{p}} + \beta_2(z-a)^{\frac{2}{p}} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$(z-a)^{\frac{1}{p}}$ représentant une détermination particulière [1].

---

[1] Considérons une fonction holomorphe s'annulant à l'origine ainsi que ses $n-1$ premières dérivées. Elle a un développement de la forme

$$w = \alpha_n z^n + \alpha_{n+1} z^{n+1} + \ldots \qquad (n \text{ entier};\ \alpha_n \gtrless 0);$$

cette égalité définit une représentation du plan z sur le plan w : pour $z = 0$, elle n'est pas conforme (p. 53). En effet, posons

$$w = \zeta^n, \qquad \zeta = \sqrt[n]{\alpha_n}\, z \left(1 + \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} z + \ldots\right)^{\frac{1}{n}}$$

et adoptons pour ζ en un point voisin de l'origine une détermination précise.

Dans le voisinage de $z = 0$, ζ est fonction holomorphe de z ; pour $z = 0$, sa dérivée par rapport à z n'est pas nulle. Donc, à l'origine, la représentation du plan z sur le plan ζ est conforme.

Or, à des courbes ζ, se coupant à l'origine sous un certain angle, correspondent des courbes w se coupant sous un angle n fois plus grand (p. 79). Donc, pour passer des courbes z aux courbes w, il faut multiplier les angles par n.

Inversement, il faudrait diviser les angles par n si l'on avait

$$w = \alpha_n z^{\frac{1}{n}} + \alpha_{n+1} z^{\frac{2}{n}} + \ldots.$$

Un développement *unique* suffit même à représenter les p racines, pourvu que l'on donne à $(z-a)^{\frac{1}{p}}$ ses p déterminations.

En effet, une rotation de z autour de a transforme par hypothèse w_1 en w_2 : d'autre part, cette rotation multiplie chaque facteur $(z-a)^{\frac{1}{p}}$ du développement de w_1 par $e^{\frac{2i\pi}{p}}$. On aura donc

$$w_2 = b + \alpha_1 e^{\frac{2i\pi}{p}}(z-a)^{\frac{1}{p}} + \alpha_2 e^{\frac{4i\pi}{p}}(z-a)^{\frac{2}{p}} + \ldots.$$

Ainsi w_2 s'exprime au moyen du même développement que w_1, si l'on convient de représenter par le symbole $(z-a)^{\frac{1}{p}}$ une détermination convenable de la racine $p^{\text{ième}}$.

3° *Au point a, une ou plusieurs racines w sont infinies.*

Posons $w = w'^{-1}$. Dans le cas le plus général, n valeurs de w' tendront vers zéro, et se partageront en systèmes circulaires dont l'un contiendra p racines. Pour développer une racine w' de ce groupe, il n'y a qu'à lui appliquer les formules du cas précédent, à cela près que b est nul par hypothèse, et que quelques-uns des coefficients α peuvent disparaître. On aura donc

$$\begin{aligned} w'_1 &= \alpha_q(z-a)^{\frac{q}{p}} + \alpha_{q+1}(z-a)^{\frac{q+1}{p}} + \ldots \\ &= (z-a)^{\frac{q}{p}}\left[\alpha_q + \alpha_{q+1}(z-a)^{\frac{1}{p}} + \ldots\right] = (z-a)^{\frac{q}{p}}\varphi, \end{aligned}$$

φ désignant une fonction holomorphe en $(z-a)^{\frac{1}{p}}$ dans le domaine de a. α_q n'est pas nul; aussi $\frac{1}{\varphi}$ est également une fonction régulière de $(z-a)^{\frac{1}{p}}$ dans le voisinage de a, et peut être développée en série suivant les puissances de $(z-a)^{\frac{1}{p}}$. On aura donc

$$w_1 = \frac{1}{w'_1} = (z-a)^{-\frac{q}{p}}\frac{1}{\varphi} = (z-a)^{-\frac{q}{p}}\left[\beta_0 + \beta_1(z-a)^{\frac{1}{p}} + \ldots\right].$$

Si $p = 1$, le point a est un pôle ordinaire; si $p > 1$, c'est un point critique et un infini. Dans tous les cas, on a un nombre limité de puissances négatives de $z-a$.

4° Le développement des racines pour des valeurs infinies de z s'obtient en remplaçant dans les relations précédentes $z-a$ par z^{-1}.

180. Le développement de Taylor dans le cas de plusieurs variables se déduit de la formule donnée pour une variable.

Soit $f(z, u)$ une fonction de deux variables, holomorphe dans un champ double contenant deux cercles décrits des points (z_0, u_0) avec les rayons r et ρ (p. 65).

Prenons les points $z_0+\alpha$, $u_0+\beta$ intérieurs au champ et posons

$$z = z_0+\alpha\lambda, \qquad u = u_0+\beta\lambda \quad (^1).$$

$f(z, u)$ devient une fonction de la seule variable complexe λ, holomorphe pour $|\lambda| \overline{\leqq} 1$. Pour ces valeurs, on a donc, en employant la notation symbolique ordinaire,

$$f(z_0+\alpha\lambda, u_0+\beta\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n\left(\alpha\frac{\partial}{\partial z}+\beta\frac{\partial}{\partial u}\right)^n f}{n!}.$$

D'où, en faisant $\lambda = 1$, on a dans le champ $|z-z_0|<r$, $|u-u_0|<\rho$

$$f(z, u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[(z-z_0)\frac{\partial}{\partial z}+(u-u_0)\frac{\partial}{\partial u}\right]_{z_0, u_0}^n f}{n!}.$$

181. De la comparaison, terme à terme, entre deux séries entières, on a déduit l'existence de *séries majorantes* relativement aux séries entières (p. 216). Les intégrales de Cauchy servent aussi à prouver la *limitation* des modules des dérivées d'une fonction holomorphe, dès lors à former des fonctions majorantes, ce qui permettra d'établir, par la méthode dite *des limites*, l'existence des intégrales des équations différentielles.

Étant donnée une fonction de plusieurs variables, holomorphe dans un champ multiple formé de cercles ayant l'origine pour centre, on appellera ici *fonction majorante* une fonction holo-

---

(1) C'est la méthode donnée par Cauchy [*Leçons sur le Calcul différentiel* (*Œuvres*, 2e série, t. IV, p. 568)]. Elle suppose la continuité de la fonction par rapport à l'ensemble des variables : les procédés de Weierstrass font abstraction de cette hypothèse explicite.

morphe dans les mêmes cercles et dont les dérivées partielles, positives à l'origine, sont en ce point supérieures ou égales aux modules des dérivées correspondantes de la fonction donnée ([1]).

Dans les séries majorantes (p. 216) figurait le module maximum du *terme général* de la série entière : ici interviendra le module maximum N de la *fonction* dans le champ considéré.

Fonctions d'une variable. — Le développement en série de Mac Laurin d'une fonction holomorphe $f(z)$ donne, pour les coefficients a_n (p. 290),

$$|a_n| = \frac{|f_n(0)|}{n!} \overline{\overline{<}} \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{|f(z)|}{|z^n|}\frac{|dz|}{|z|} \overline{\overline{<}} \frac{N}{2\pi r^n}\int_C \frac{|dz|}{|z|},$$

en désignant par N le maximum de $|f|$ sur la circonférence C de rayon r, intérieure au domaine où $f(z)$ est holomorphe ([2]). Pour évaluer la dernière intégrale on pose $z = re^{i\theta}$, c'est-à-dire $|dz| = |z|\,d\theta$. Elle est donc égale à 2π; d'où la relation

$$|a_n| \overline{\overline{<}} N r^{-n}.$$

C'est le lemme établi (p. 219) sans considération d'intégrales. Dès lors, par exemple, l'expression

$$N\frac{1}{1-\frac{z}{r}}$$

est majorante, relativement à la fonction $f(z)$, puisque, dans son développement, z^n a pour coefficient Nr^{-n}.

Fonctions de plusieurs variables. — Pour abréger, prenons deux variables.

Soit $f(z, u)$ la fonction holomorphe à étudier; désignons par r et ρ deux nombres inférieurs aux valeurs de deux rayons de convergence associés relatifs à l'origine, et par N la limite

---

([1]) Cette définition revient à celle déjà donnée. *Cf.* BRIOT et BOUQUET, *J. E. P.*, XXXVIe Cahier, p. 136.

([2]) Le théorème subsiste, *a fortiori*, si N désigne le maximum de $|f|$ sur un contour extérieur au cercle C et à l'intérieur duquel f soit holomorphe. On le voit en appliquant à la fonction $\log|f(z)|$ ce théorème : une fonction harmonique régulière dans un domaine ne peut être ni maximum ni minimum en un point *intérieur* à ce domaine (n° 314 et p. 281, note).

supérieure dans le domaine (r, ρ), frontière comprise, de la fonction bornée $|f|$.

Il s'agit, dans le développement en série entière de la fonction f, de transformer le coefficient a_{pq} du terme $z^p u^q$, *de manière à mettre en évidence une limite supérieure de son module.*

On a (p. 296)

$$a_{pq} = \frac{1}{p!\,q!}\left[\frac{\partial^{p+q} f(z, u)}{\partial z^p\, \partial u^q}\right]_{\substack{z=0\\u=0}}.$$

Aussi, regardant d'abord z comme la seule variable dans f, nous partirons de la formule donnée à la page 282, après y avoir remplacé a et z par o et $re^{i\theta}$. Il vient

$$\left[\frac{\partial^p f(z, u)}{\partial z^p}\right]_{z=0} = \frac{p!}{2\pi r^p}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}, u)\, e^{-p\theta i}\, d\theta.$$

Dérivons les deux membres q fois par rapport à u, et pour cela, au second membre, dérivons q fois la fonction $f(re^{i\theta}, u)$, en appliquant la formule

$$\left[\frac{\partial^q f(re^{i\theta}, u)}{\partial u^q}\right]_{u=0} = \frac{q!}{2\pi \rho^q}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}, \rho e^{i\omega})\, e^{-q\omega i}\, d\omega.$$

En portant dans l'expression de a_{pq} la valeur trouvée, il vient

$$a_{pq} = \frac{1}{(2\pi)^2 r^p \rho^q}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}, \rho e^{i\omega})\, e^{-i(p\theta+q\omega)}\, d\theta\, d\omega,$$

et par suite, puisque l'on a dans le champ (r, ρ)

$$|f| \lesseqgtr N,$$

on en conclut la relation demandée

$$|a_{pq}| \lesseqgtr N r^{-p} \rho^{-q}.$$

Ainsi toute fonction qui, développée en série entière, a pour coefficient de son terme général $N r^{-p} \rho^{-q}$ est majorante pour la fonction f. Telles sont, par exemple, les fonctions

$$\frac{N}{\left(1 - \frac{z}{r}\right)\left(1 - \frac{u}{\rho}\right)}, \quad \frac{N}{1 - \frac{z}{r} - \frac{u}{\rho}}.$$

CHAPITRE V.

LE PROLONGEMENT ANALYTIQUE D'APRÈS WEIERSTRASS.

182. *Une fonction*, avons-nous dit, *est analytique dans un domaine lorsqu'elle est* en général *holomorphe dans ce domaine*: ses singularités forment des ensembles continus ou non, mais tels que le domaine des points ordinaires reste d'un *seul tenant*. Par fonction holomorphe on entend indifféremment une fonction uniforme et continue, et ayant une dérivée déterminée (p. 275 et 57), ou bien une fonction développable en série de Taylor.

La considération d'une série de puissances et de l'ensemble de ses *prolongements analytiques* (on l'appelle un *système monogène de séries de puissances*) a permis à Weierstrass de prouver *a posteriori* l'existence de pareilles fonctions envisagées *a priori* par Cauchy, de faire connaître les éléments nécessaires à leur détermination et d'en donner une représentation les définissant avec une netteté parfaite.

Pour y parvenir, il fallait d'abord transformer et préciser la notion de *prolongement continu* de fonction continue, aussi ancienne que la Géométrie analytique ([1]) : une loi établie par

---

([1]) Dès 1811, à propos du symbole F considéré comme intégrale de l'équation hypergéométrique (p. 193), Gauss s'exprime ainsi : ... *Distinguendum est inter duas significationes characteristicæ* F, *quatenus scilicet vel repræsentat functionem, cujus indoles exprimitur per æquationem differentialem, vel solam summam seriæ infinitæ. Posterior quamdiu elementum quartum inter* — 1 *et* + 1 *situm est, semper exhibet quantitatem ex asse determinatam, sed cavendum est ne hos limites excedas.... Prior vero significatio repræsentat functionem generalem, quæ quidem secundum legem continuitatis semper mutatur, si elementum quartum fluxu continuo mutatur, sive ipsi valores reales sive imaginarios tribuas, si modo semper valores* o *et* 1 *evites. Hinc patet, in posteriori sensu functionem pro æqualibus elementi quarti valoribus* (*transitu seu potius reditu per quantitates imaginarias facto*) *valores inæ-*

Gauss dans la Théorie du potentiel, et transportée par Riemann dans celle des fonctions, sert de fondement à cette définition (¹).

Au sens de Weierstrass, *prolonger analytiquement* une fonction $f(x)$, définie dans un domaine borné δ d'un seul tenant et analytique dans ce domaine, c'est trouver une fonction définie dans un domaine $\mathfrak{D}$ d'un seul tenant renfermant δ à son intérieur, analytique dans $\mathfrak{D}$, et identique à la fonction $f(x)$ dans le domaine δ.

Comment réaliser ce prolongement?

Partons d'une série de Taylor ordonnée suivant les puissances de $x-a$ (on la représentera indifféremment par $\mathfrak{P}(x-a)$, $\mathfrak{P}(x\,|\,a)$, $\mathfrak{P}_a$) ayant pour domaine de convergence un cercle C_a *dont le rayon n'est ni nul ni infini.* Toute fonction ayant même valeur que la série $\mathfrak{P}_a$ dans le cercle C_a peut être représentée, dans le voisinage de tout point *b intérieur* à ce cercle, par une autre série de Taylor $\mathfrak{P}(x\,|\,b)$ (p. 212) : les valeurs en b de la série $\mathfrak{P}_a$ et de ses dérivées déterminent les coefficients de la série $\mathfrak{P}_b$, puisqu'au point b et dans son voisinage les deux séries ont même valeur. Soit C_b le cercle de convergence de cette nouvelle série.

Deux cas sont possibles :

1° *Le cercle C_b est tangent intérieurement au cercle C_a.* — Alors la série $\mathfrak{P}_b$ ne peut servir à représenter à l'extérieur de C_a une fonction représentée à son intérieur par la série $\mathfrak{P}_a$. Cette fonction reste toujours enfermée dans le cercle initial, si le

---

quales adipisci posse ... (*Œuvres,* t. III, p. 226). Dans les *Œuvres de Cauchy,* la notion de prolongement se trouve aussi sous la forme de détermination par continuité d'une fonction le long d'une courbe, dès que l'on connaît sa valeur et les valeurs de ses dérivées en un point.

Jusqu'ici il était commode de représenter par w et z les fonctions et les variables : désormais nous les désignerons le plus souvent par y et x (y_i et x_k).

Pour ce Chapitre, *cf* HADAMARD, *La série de Taylor et son prolongement analytique,* 1901.

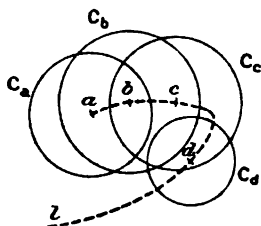
(¹) GAUSS, *Œuvres,* t. V, p. 223. — RIEMANN, *Œuvres,* trad., p. 33.

Ce principe a été démontré plus haut (p. 214 et 291); il en résulte que si une fonction est prolongeable, elle n'est prolongeable que d'une seule manière.

cercle C_b est tangent à ce cercle *quel que soit le point b pris à l'intérieur de* C_a ([1]).

2° *Le cercle C_b sort du cercle C_a.* — Alors, dans la région commune aux deux cercles, les deux séries $\mathfrak{P}_a$ et $\mathfrak{P}_b$ ont même valeur. En effet, dans le cercle de centre b tangent intérieurement au cercle C_a (*fig.* 33), la série $\mathfrak{P}_a$ peut être remplacée par

Fig. 33.



la série $\mathfrak{P}_b$ (p. 212); donc ces deux séries coïncident dans toute la région commune à leurs cercles de convergence (p. 213).

Si l'on considère une fonction comme définie à l'intérieur de C_a par la série $\mathfrak{P}_a$, et à l'intérieur de C_b par $\mathfrak{P}_b$, on a une fonction définie dans l'ensemble des deux cercles. Elle a, dans leur partie commune, deux représentations différentes; mais cela n'a pas d'inconvénient, puisqu'elles fournissent la même valeur pour la fonction.

On dit que la série $\mathfrak{P}_a$ définit une fonction *prolongée analytiquement* en dehors de C_a par la série $\mathfrak{P}_b$; on peut ainsi en calculer la valeur en des points où l'élément $\mathfrak{P}_a$ diverge. Les éléments $\mathfrak{P}_a$ et $\mathfrak{P}_b$ sont appelés *contigus*.

Poursuivons ce mode d'extension, et prenons un point c à l'intérieur de C_b. Si le cercle de convergence d'une série $\mathfrak{P}(x \mid c)$, obtenue par la méthode indiquée, sort du cercle C_b, cette troisième série prolongera la fonction en dehors du second cercle; et ainsi de suite. De proche en proche, on constituera une *chaîne d'élé-*

([1]) D'après la règle qui conduit au développement de Taylor, le cercle C_b est *au moins* tangent intérieurement au cercle C_a.

Les rayons de convergence des cercles C_b forment un ensemble dont la *limite inférieure* est o : tout à l'heure, nous démontrerons à nouveau que leur limite supérieure ne peut dépasser le double du rayon C_a (*voir* aussi n°s 178 et 278).

ments $\mathfrak{P}$, correspondant à une *chaîne de cercles,* qui pourront recouvrir le plan ou une partie du plan, une fois, plusieurs fois, une infinité de fois. Deux chaînes différentes, relatives à deux suites de points $(a, b, c, \ldots, k, l)$, $(a, b', c', \ldots, k', l)$ prises sur un même arc de courbe et correspondant à des valeurs toujours croissantes de cet arc, font aboutir au même élément $\mathfrak{P}_l$. Ainsi, *en chaque point que l'on pourra atteindre, la fonction aura une valeur bien déterminée, si l'on fixe le chemin qui y conduit.*

De même, une série $\mathfrak{P}(x \mid l)$ aura pour élément contigu une série $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ ayant un domaine de convergence qui renferme le point l à son intérieur, si les deux séries ont même valeur dans leur domaine de convergence commune.

L'ensemble de ces éléments $\mathfrak{P}(x \mid a), \mathfrak{P}(x \mid b), \ldots, \mathfrak{P}(x \mid l), \ldots$ $\left[\textit{au besoin } \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)\right]$ constitue « une fonction analytique monogène qui peut être uniforme ou multiforme, mais qui est complètement définie lorqu'on donne un de ses éléments » ([1]). Le domaine d'existence de cette fonction est l'ensemble des régions que l'on peut atteindre par prolongement.

La fonction est uniforme ou multiforme, suivant qu'en allant d'un point du domaine à un autre, par divers chemins, il est impossible ou non d'obtenir en cet autre point des valeurs différentes pour la fonction. On peut toujours la regarder comme uniforme sur une surface de Riemann convenablement construite.

([1]) WEIERSTRASS, *Œuvres,* t. II, p. 210 (trad. *B. D.,* 1881, p. 166).

C'est pour pouvoir engendrer la fonction analytique que l'on suppose le centre de chaque cercle à l'intérieur du cercle précédent (et même aussi du cercle *suivant,* si l'on veut à partir de chaque élément monter ou descendre indifféremment la chaîne). Mais on peut pratiquement regarder comme contigus ou comme *se prolongeant immédiatement* des éléments dont les domaines de convergence empiètent l'un sur l'autre et qui ont même valeur dans cette région commune (p. 214).

Deux séries de puissances se *prolongent* l'une l'autre lorsqu'elles appartiennent à une suite de séries de puissances en nombre fini, dont chacune prolonge immédiatement la précédente.

Un élément *quelconque* définit la fonction analytique aussi bien que l'élément initial : pour retrouver cet élément, il n'y a qu'à remonter la chaîne.

Quand les séries dérivées $\mathfrak{P}'_0, \mathfrak{P}'_1, \ldots$ forment une chaîne, il en est de même des séries $\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \ldots$ (p. 139).

Ici donc, on définit la fonction analytique par l'ensemble des éléments qui la représentent (¹); plus haut (p. 47), on l'avait définie *a priori* par ses propriétés. Les deux définitions sont équivalentes.

Sur une ligne continue intérieure au domaine d'existence, le *rayon de convergence* des éléments de la chaîne est une *fonction continue*.

En effet, soient $R(a)$ et $R(b)$ les rayons de convergence de deux éléments contigus relatifs à deux points a et b de cette ligne. Puisque les cercles de convergence se coupent ou sont tangents intérieurement, on a

$$|R(a) - R(b)| \leqq |a - b|,$$

ce qui établit la continuité de la fonction $R(x)$.

Dès lors, le long de toute ligne intérieure au domaine d'existence, les rayons de convergence, tous positifs, atteignent effectivement un minimum positif (et non pas nul). Donc ils dépassent tous un nombre positif fixe, et l'on peut aller d'un point à un autre en employant un *nombre fini* d'éléments (²).

183. Le domaine d'existence d'une fonction analytique peut s'étendre de proche en proche tant que le prolongement est

---

(¹) *Exemple.* — La fonction qui a pour *expression analytique* $(1 - x)^{-1}$ existe dans tout le plan, sauf au point 1. On peut la regarder comme une *fonction analytique* définie par l'élément

$$\mathfrak{P}_0 = 1 + x + \ldots + x^n + \ldots.$$

Cet élément est continué par l'élément

$$\mathfrak{P}_a = \frac{1}{1-a}\left[1 + \frac{x-a}{1-a} + \left(\frac{x-a}{1-a}\right)^2 + \ldots\right] \qquad (|a| < 1;\ |x - a| < |1 - a|).$$

Une chaîne d'éléments $\mathfrak{P}_0$, $\mathfrak{P}_a$, …, $\mathfrak{P}_l$, … permet de calculer la valeur de la fonction en tel point que l'on veut.

Des fonctions analytiques engendrent de nouvelles fonctions analytiques, quand on leur applique un nombre fini de fois les opérations élémentaires du calcul (Chap. III et IX), ou quand on les fait entrer comme éléments dans des équations différentielles (Chap. VI).

(²) *Voir* le raisonnement fait p. 45 et 122 (en note) pour établir deux théorèmes analogues.

possible : de là l'étude des obstacles pouvant empêcher ce prolongement, et par suite des *points singuliers* ([1]).

Soit L une ligne arbitraire partant du point initial a. Tous les points de L *intérieurs* au cercle de convergence C_a peuvent être atteints au moyen d'un nombre *fini* d'éléments : il n'en est pas forcément de même d'un point α *situé sur la circonférence* C_a et des points extérieurs.

Deux cas sont possibles :

1° Il existe une série de puissances $\mathfrak{P}(x \mid \alpha)$ qui coïncide avec $\mathfrak{P}(x \mid a)$ dans la région commune aux domaines C_a et C_α. La fonction analytique est alors holomorphe ou *régulière* en α : le point α est un *point ordinaire*.

2° S'il est impossible de former une pareille série, le point α est dit *point singulier*. Ce point singulier est donc un point frontière servant de séparation entre les points de la ligne L que l'on peut atteindre par prolongement en suivant à partir de a la ligne L et les autres points de cette ligne.

Ce que l'on vient de dire de l'élément initial $\mathfrak{P}(x \mid a)$ peut se répéter de chacun des éléments de la fonction analytique.

L'ensemble des points singuliers du type ci-dessus relatifs à tous ces éléments constitue la *frontière* du domaine d'existence de cette fonction. Le domaine lui-même comprend les points *intérieurs*, à l'exclusion des points frontières; en ces points intérieurs, le rayon de convergence est *positif*. *Ce domaine est d'un seul tenant,* et par suite l'ensemble des points où la fonction cesse d'être définie n'en interrompt pas la continuité.

Plus généralement, l'ensemble des points singuliers est l'ensemble des points où la fonction n'est pas régulière : il est toujours *fermé,* puisqu'un point ordinaire est le centre d'un cercle dont aucun point n'est singulier. Ainsi tout point limite de points singuliers est aussi un point singulier.

Dans cette définition d'un point ordinaire g (ou d'un point singulier h) intervient la notion du *chemin suivi* pour y aboutir : il

---

([1]) Le mot anglais *obstacle point* montre bien leur rôle.

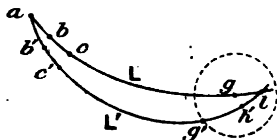
faut se préoccuper des éléments choisis pour former la chaîne de cercles qui permet (ou ne permet pas) d'atteindre ce point. Prenons deux lignes L et L′ issues de a et traversant g (ou h); plus généralement partons de a pour décrire d'abord un contour fermé, puis la ligne L : rien ne dit que le point g (ou h) ordinaire (ou singulier) sur l'un des chemins soit ordinaire (ou singulier) sur l'autre. C'est ce que nous avons constaté en traitant des fonctions algébriques.

Une discussion est donc nécessaire; voici des remarques qui l'abrégeront :

1° Dans un domaine fermé simplement connexe, *une fonction analytique est uniforme lorsqu'elle n'a de singularité sur aucune ligne issue du point arbitraire a* et restant à l'intérieur du domaine : par suite elle est holomorphe dans ce domaine.

En effet, pour montrer que tout chemin fermé intérieur au domaine ramène la valeur initiale, il suffit d'établir que par deux chemins, partant de a et aboutissant au point arbitraire l, l'un L quelconque, l'autre L′ suffisamment voisin dont le raisonnement fixera la position; on obtient la même valeur pour la fonction (*fig.* 34).

Fig. 34.



Il en est bien ainsi, car, en partant de a avec l'élément $\mathfrak{P}_a$, on peut associer deux points b et b', intérieurs à C_a, tels que $C_{b'}$ et C_b aient respectivement b et b' à leur intérieur (puisque les rayons de convergence sont finis). Le long du segment bb', $\mathfrak{P}_b$ et $\mathfrak{P}_{b'}$ coïncident avec $\mathfrak{P}_a$, et par suite coïncident entre eux. De même, appelons c et c' des points intérieurs à C_b et tels que c et c' soient à l'intérieur de $C_{c'}$ et C_c : les développements $\mathfrak{P}_c$ et $\mathfrak{P}_{c'}$ coïncideront le long de cc'. Et ainsi de suite; finalement les fonctions auront même valeur en l. (*Voir* aussi p. 92.)

On en conclut qu'une fonction analytique, prolongeable à partir d'un point a le long d'un chemin fermé simple C et ne reprenant

pas la même valeur lorsqu'on revient en a, *a au moins un point singulier à l'intérieur du contour* C.

L'existence d'un point singulier sur la circonférence du cercle de convergence de chaque élément en est aussi une conséquence (*cf.* également les n°s 178 et 278).

2° Une fonction analytique, uniforme dans un domaine fermé, est régulière en un point l quel que soit le chemin L' par lequel on y parvienne, si elle est régulière en ce point quand on y arrive par un chemin particulier L (on suppose qu'il n'y a ni sur L, ni sur L' de point singulier entre le point de départ et l).

En effet, partons de a en marchant d'abord sur L : nous finirons par arriver en un point g, assez voisin de l pour que le cercle de convergence C_g ait à son intérieur le point l. Désignons par δ la plus courte distance de l à la circonférence C_g.

Si nous partons de a en marchant sur L', nous parviendrons en un point h' situé en deçà de l, à des distances de l et de la circonférence C_g chacune inférieure à δ, avec un élément $\mathfrak{P}_{h'}$ dont la valeur coïncidera avec celle de $\mathfrak{P}_g$ dans le voisinage de h', puisque la fonction est uniforme et que, par suite, l'élément $\mathfrak{P}_g$ la détermine le long de l'arc $g'l$ que l'on peut supposer intérieur à C_g (*fig.* 34). Les éléments $\mathfrak{P}_g$, $\mathfrak{P}_{h'}$ ont donc même valeur dans la région commune à leurs cercles de convergence, cercles qui tous deux renferment le point l : le premier détermine la fonction en tous les points de l'arc $h'l$, *y compris le point* l; il en sera de même du second.

3° Les points singuliers des fonctions analytiques uniformes (ils sont singuliers, quel que soit le chemin suivi pour les atteindre) se divisent en pôles et points singuliers essentiels (p. 59).

184. D'après ce qui précède, au moins lorsqu'on chemine sur un certain rayon du cercle de convergence, le prolongement est impossible. *Le prolongement peut-il être impossible dans toutes les directions,* de telle sorte que la circonférence du cercle de convergence soit une coupure essentielle et qu'ainsi la fonction reste enfermée dans un cercle? A quels caractères reconnaître de telles singularités? Les rencontre-t-on dans le cas général?

Les séries entières auxquelles conduisent des problèmes très vastes, par exemple celles qui servent à l'intégration d'équations différentielles arbitraires, ont le plus souvent des prolongements [1] : aussi durant quelque temps on put regarder comme exceptionnelle la fonction ayant pour ligne singulière le cercle de convergence de la série qui la définit.

Mais une série provenant d'un problème général a des coefficients définis par une loi analytique : ce n'est pas la série générale, si l'on entend par là celle dont les coefficients sont choisis arbitrairement et indépendamment les uns des autres. Pour une pareille série posée *a priori*, aucune direction du plan ne semble devoir jouir de propriétés particulières, et, par suite, s'il y a une singularité dans une direction, n'y en aurait-il pas dans toutes?

Dans quel sens trancher la question?

Un premier pas vers la solution fut fait par Weierstrass lorsqu'il apporta un exemple de fonction analytique enfermée dans un cercle [2]. Soit la série

$$1 + ax^c + \ldots + a^n x^{c^n} + \ldots \qquad (a \text{ const.} > 0;\ c \text{ entier} > 0).$$

Son cercle de convergence a pour rayon l'unité, car le rapport d'un terme au précédent tend vers zéro ou l'infini suivant que $|x|$

(1) C'est le cas le plus habituel; mais, même pour des séries dont les coefficients sont déterminés par une loi, le cercle de convergence *peut* être une coupure. M. Fabry en donne des exemples simples (*A. E. N.*, 1896).

(2) La théorie des fonctions modulaires avait déjà fait connaître de pareilles fonctions : ce qui caractérise l'exemple de Weierstrass, c'est que l'existence de la coupure circulaire résulte de la forme seule du développement, sans connaissances *a priori* sur la fonction étudiée. *Cf.* DU BOIS-REYMOND, *J. de Crelle*, t. 79. — WEIERSTRASS, *Œuvres*, t. II, p. 223 (*B. D.*, 1881, p. 179).

Comme cas particulier simple, M. Stäckel considère la fonction définie par la série

$$\varphi(x) = x + x^c + \ldots + x^{c^n} + \ldots \qquad (c \text{ entier} > 1)$$

et déduit l'impossibilité de son prolongement en dehors du cercle de rayon 1 de cette remarque élémentaire : $|\varphi(x)|$ croît indéfiniment dans le voisinage du point 1, et même, en vertu de l'identité

$$\varphi(x^{c^n}) = \varphi(x) - x - x^c - \ldots - x^{c^{n-1}},$$

dans le voisinage de tout point racine de l'équation $x^{c^n} = 1$, par suite en des points formant un ensemble partout dense sur la circonférence $|x| = 1$. (*J. de Crelle*, t. 112, p. 262).

est <1 ou >1 : je dis que *ce cercle est une ligne singulière pour la fonction définie par la série*.

En effet, sur ce cercle la fonction a au moins une singularité x_0. Faisons la substitution $\left(x, x e^{\frac{2k\pi i}{c^h}}\right)$, h et k étant des entiers positifs, ce qui ne modifie pas la série à partir du terme de rang h. D'une part, les fonctions définies par la série initiale et la série transformée ont les mêmes singularités; de l'autre, la singularité x_0 de la première fonction vient au point $x'_0 = x_0 e^{\frac{2k\pi i}{c^h}}$: c'est donc que x'_0 était un point singulier de la première fonction.

La singularité x'_0 a même module que x_0, et dès lors elle aussi est sur le cercle de convergence; de plus, on peut disposer de h et de k de telle sorte que l'argument de x'_0 tende vers tout nombre donné. Par suite, tout point de la circonférence est une singularité.

Ce raisonnement est applicable chaque fois que, dans une série $\sum a_n x^{c_n}$ ayant un cercle de convergence fini, les entiers c_n admettent à partir d'un certain rang N un plus grand commun diviseur δ croissant indéfiniment avec N.

En effet, si on laisse de côté les premiers termes de la série (ils n'influent pas sur la distribution des singularités), on a une série entière en x^δ. La substitution $\left(x, x e^{\frac{2k\pi i}{\delta}}\right)$ d'une part ne déplace pas les singularités, et de l'autre les transporte (pour δ suffisamment grand) en un point arbitraire du cercle ([1]).

([1]) Hadamard, *J. M.*, 1892, p. 115.

Plus généralement, quand la série $\sum a_n x^{c_n}$ a un cercle de convergence fini, ce cercle est une coupure, quels que soient les coefficients a_n, si les exposants c_n sont des entiers positifs croissants tels que l'un des rapports $c_{n+1} - c_n : c_n$ (Hadamard, *loc. cit.*, p. 116), $c_{n+1} - c_n : \sqrt{c_n}$ (Borel, *J. M.*, 1896) reste supérieur à un nombre fixe, et même pourvu que la différence $c_{n+1} - c_n$ grandisse indéfiniment avec n (Fabry, *A. E. N.*, 1896). Le problème est ainsi résolu pour les séries *à lacunes indéfiniment grandissantes*.

Quant aux séries *complètes*, le cercle de convergence est encore une coupure quand les a_n sont des fonctions de n, périodiques, à période incommensurable, développables en séries trigonométriques illimitées absolument convergentes (Le Roy, *A. T.*, 1900, p. 320). *Voir* aussi Lerch, *A. M.*, t. X, p. 87; Méray, *B. D.*, 1888, p. 248.

Une fonction peut être *continue ainsi que toutes ses dérivées sur toute* la

Enfin, M. Pringsheim fit cesser les hésitations en montrant que la *fonction définie par une série entière* a en général *son cercle de convergence comme coupure* (¹). Ainsi, la *fonction la plus générale,* c'est-à-dire celle pour laquelle la distribution des points singuliers n'est soumise à aucune loi, *ne correspond pas à la série la plus générale,* à celle pour laquelle dans le choix des coefficients on ne suit aucune loi.

185. De ces considérations résulte l'existence de fonctions analytiques cessant d'exister dans toute une région du plan, en d'autres termes *ayant des espaces lacunaires.* C'étaient là, au dire de Weierstrass, « des théorèmes qui ne s'accordent point

---

frontière de son domaine d'existence. Telle est celle que définit la série de M. Fredholm

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n x^{n^2} \qquad (|a|<1),$$

dont la frontière est le cercle $|x|=1$, puisque $c_{n+1}-c_n$ est infini avec n (*C. R.*, 1890, 1ᵉʳ semestre, p. 627). Pour d'autres exemples, *cf.* PRINGSHEIM, *M. A.*, t. XLII, p. 153 (en tenant compte des remarques de M. BOREL, *A. E. N.*, 1895, p. 22).

(¹) Voici sa démonstration. Soit $\varphi(x)$ une série entière *particulière* admettant comme coupure son cercle de convergence C. Toute série entière $f(x)$ peut être mise sous la forme $\varphi(x)+\psi(x)$. Dès lors, pour que cette série $f(x)$ soit continuable au delà de C, il faut que tous les points d'un arc de la circonférence C soient des singularités pour $\psi(x)$, et des singularités telles qu'elles fassent compensation à celles de $\varphi(x)$. Ceci exigerait des relations particulières entre les coefficients de $\varphi(x)$ et de $\psi(x)$, qui, dans le cas général, n'existeront pas (*M. A.*, t. XLIV, p. 50).

A dire vrai, de ce raisonnement il ressort seulement que les séries pour lesquelles le cercle de convergence est une coupure sont *aussi nombreuses* que les autres. Peut-on, du reste, affirmer autre chose, puisqu'une transformation conforme conservant l'origine, par exemple celle d'Euler (p. 74), fait correspondre à une série entière définissant une fonction ayant pour coupure la circonférence $|x|=$ const., une fonction holomorphe à l'origine, et dès lors une série entière définissant une fonction dont le domaine d'existence a pour frontière la circonférence $\left|\frac{x}{\alpha-x}\right|=$ const. (HADAMARD, *Op. cit.*, p. 34).

Des démonstrations où est bien défini le sens de ce mot : *en général,* ont été données par MM. Borel (*A. M.*, t. XXI, p. 243, et *Séries divergentes,* p. 147) et Fabry (*A. M.*, t. XXII, p. 65) : ils regardent une série de Taylor comme *générale* lorsque la valeur du $n^{\text{ième}}$ coefficient est indépendante de celle des coefficients précédents.

avec les vues ordinaires », car les premiers travaux des géomètres portaient sur des fonctions analytiques telles que les cercles C_a, C_b, ... recouvrassent tout le plan soit une fois, soit plusieurs fois, soit une infinité de fois, *en laissant seulement de côté certains points singuliers isolés.*

On a même été plus loin. Aussi, après avoir rappelé des exemples simples de fonctions cessant d'exister en des points isolés, ou bien en des points non isolés distribués soit ponctuellement, soit sur des lignes ou dans le voisinage de lignes, soit dans des aires, nous montrerons qu'*étant donné un domaine arbitraire, de frontière absolument quelconque, il existe une fonction régulière en tout point intérieur et singulière en chaque point de la frontière* (pourvu que le domaine soit d'un seul tenant) [1].

Les fractions rationnelles, les fonctions méromorphes, la fonction $e^{\frac{1}{x}}$ ont des discontinuités *ponctuelles isolées,* polaires ou essentielles. La fonction $\left(\sin \frac{1}{x}\right)^{-1}$ a dans le voisinage de l'origine une infinité de pôles (les points $x^{-1} = k\pi$); l'origine est un point essentiel, puisqu'en ce point ni la fonction, ni son inverse

---

[1] Ce théorème énoncé par Weierstrass (*Œuvres,* t. II, p. 223) a été démontré simultanément par MM. Poincaré (*Acta Soc. Fennicæ,* t. XII, p. 341, ou mieux *American Journal,* 1892) et Goursat (*C. R.,* 1882, *B. D.,* 1887, p. 109).

Leur démonstration supposait que la frontière a en chaque point une courbure : M. Osgood (*Bulletin of the Amer. M. S.,* octobre 1898) l'a rendue applicable à tous les cas.

La première preuve générale a été donnée par M. Runge (*A. M.,* t. VI, p. 239) : elle repose sur ce qu'une fonction analytique uniforme est représentable par une série de fonctions rationnelles (n° 189) et elle donne la fonction cherchée sous la forme d'une série de fractions rationnelles.

Pour les exemples, *cf.* aussi : Hermite, *Acta Soc. Fennicæ,* t. XII, p. 67 (ou mieux *J. de Crelle,* t. 91, p. 54). — Stieltjes, *B. D.,* 1887, p. 46. — Goursat, *B. D.,* 1893, p. 247. — Teixeira, *B. D.,* 1893, p. 29.

Insistons sur ce qu'une fonction à espace lacunaire est celle qu'on ne peut amener *par prolongement* à exister dans certaines aires.

« Si l'on ne s'imposait *a priori* aucune condition, rien ne serait plus facile que de concevoir une transcendante présentant un *espace lacunaire quelconque.* On pourrait imaginer, par exemple, une fonction définie de la manière suivante : elle devrait être égale à 1 à l'extérieur d'un certain cercle et cesser d'exister à l'intérieur de ce cercle. Ce cercle serait un espace lacunaire. » (Poincaré, *loc. cit.*)

ne sont déterminés : c'est donc une singularité *ponctuelle non isolée* (1).

L'intégrale

$$f(x) = \int_\alpha^\beta \frac{dt}{x-a-ib+t} \qquad (a, b, \alpha, \beta, t \text{ réels})$$

cesse d'exister sur le segment engendré par le point $(a-t, b)$, t variant de α à β. La fonction analytique uniforme qu'elle définit a pour ligne singulière un *segment* de droite parallèle à l'axe réel.

Il est facile de généraliser ces résultats, et d'exprimer *à l'aide d'intégrales ou de séries* des fonctions analytiques ayant des lignes singulières ou des espaces lacunaires.

Voici l'exemple donné par M. Poincaré pour montrer qu'il y a des fonctions à espace lacunaire existant dans un domaine continu ayant une frontière quelconque.

Considérons la série

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x-b_n},$$

et un contour C (ayant en chaque point une tangente et un rayon de courbure) divisant le plan en deux régions, l'une intérieure, l'autre extérieure à ce contour. On suppose que la série $\sum a_n$ converge absolument, que tous les points b_n sont à l'intérieur de C ou sur C, et forment un ensemble dense sur tout arc de C. Dans ces conditions, *à l'extérieur* de C la série $\varphi(x)$ a ses éléments holomorphes et converge uniformément, et par suite est holomorphe (nos 139 et 233); un calcul que nous ne développerons pas montre de plus que le cercle de convergence relatif à chacun des points de tout domaine extérieur à C est tangent extérieurement à C (2). La fonction analytique $\varphi(x)$ a donc la région intérieure à C comme espace lacunaire.

---

(1) Comme exemple de fonction dont les singularités forment un *ensemble parfait discontinu*, on peut citer les fonctions fuchsiennes de la troisième famille : ce sont des fonctions uniformes définies dans tout le plan, ayant des singularités dont aucune n'est isolée et qui ne forment pas de ligne singulière.

(2) *Voir* Poincaré, *Acta Societatis Fennicæ*, t. XII, p. 346. — Goursat, *B. D.*, 1887, p. 109.

On réalise les conditions de l'énoncé en posant

$$a_n = u_1^{\mu_1} \dots u_p^{\mu_p}, \qquad b_n = \frac{\mu_1 \alpha_1 + \dots + \mu_p \alpha_p}{\mu_1 + \dots + \mu_p},$$

$|u_1|, \dots, |u_p|$ étant < 1; $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ désignant des constantes arbitraires; le signe de sommation s'étendant à tous les systèmes de valeurs $\mu_1, \dots, \mu_p$ entières et positives. Le contour C sera un polygone convexe, ayant à son intérieur ou sur ses côtés tous les points $\alpha_1, \dots, \alpha_p$, et n'ayant pas de sommets autres que les points $\alpha_1, \dots, \alpha_p$.

En effet, la série p^{uple} $\sum |u_1^{\mu_1} \dots u_p^{\mu_p}|$ converge absolument, puisqu'elle résulte du produit des identités

$$\frac{1}{1 - u_1} = \sum u_1^{\mu_1}, \qquad \dots, \qquad \frac{1}{1 - u_p} = \sum u_p^{\mu_p};$$

tous les points b_n sont à l'intérieur de C ou sur C, d'après une propriété évidente du centre des distances proportionnelles ($\mu_i > 0$); enfin, en disposant convenablement de $\mu_1, \dots, \mu_p$ on peut obtenir pour b_n tel point que l'on voit situé sur le périmètre C (ou à son intérieur).

186. A chaque élément $\mathfrak{P}_0$ d'une fonction analytique prolongeable correspondent une infinité *non dénombrable* d'éléments contigus $\mathfrak{P}_1$: de là une question que l'on peut poser sous diverses formes :

1° La considération de tous les éléments $\mathfrak{P}_1$ est-elle nécessaire pour obtenir dans sa totalité le domaine $\mathfrak{D}_1$ formé par l'ensemble des cercles de convergence des éléments $\mathfrak{P}_1$? De même faudra-t-il prendre tous les éléments $\mathfrak{P}_2$ contigus à tous les éléments $\mathfrak{P}_1$ pour obtenir le domaine $\mathfrak{D}_2$ formé par les cercles de convergence des éléments $\mathfrak{P}_2$, et ainsi de suite (1)?

2° Quand la fonction analytique est multiforme, arrivera-t-on

(1) Le domaine $\mathfrak{D}_1$ ne peut pas se recouvrir lui-même : il n'en est pas de même des domaines $\mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{D}_3$, ... qui peuvent se recouvrir plusieurs fois et une infinité de fois. C'est ce qui arrive par exemple pour la fonction $\log(1 - x)$.

par des opérations *méthodiquement classées* à obtenir en chaque point *intérieur* au domaine d'existence toutes ses valeurs ?

La réponse a été donnée par MM. Poincaré et Volterra :

1° Pour obtenir tout le domaine $\mathfrak{D}_1$, il suffit de prendre ceux des éléments $\mathfrak{P}_1$ dont le centre a des coordonnées rationnelles, et par suite de considérer *une infinité dénombrable* de prolongements. De même, des valeurs de la fonction dans le domaine $\mathfrak{D}_1$ on pourra déduire toutes ses valeurs dans le domaine $\mathfrak{D}_2$ en prenant ceux des éléments $\mathfrak{P}_2$ dont les centres ont des coordonnées rationnelles. Et ainsi de suite; finalement en vertu des propriétés des ensembles dénombrables (p. 15), la considération d'une *infinité dénombrable* d'éléments fera connaître toute la fonction, au moins en tout point *intérieur* au domaine d'existence de la fonction [1].

2° Par suite, les opérations (en nombre évidemment infini si la fonction a une infinité de valeurs) nécessaires pour obtenir en un point toutes les valeurs de la fonction formant au plus une infinité dénombrable, on peut, à partir de l'élément initial, ranger méthodiquement toutes celles qui permettront d'atteindre la fonction en tout point où elle est holomorphe [2].

---

[1] La démonstration que nous allons donner dans la note suivante s'appliquera seulement aux points *intérieurs* aux cercles de convergence : par suite, la connaissance de la fonction sur la *frontière* de son domaine d'existence exigera une infinité *non dénombrable* d'éléments.

Une méthode de M. Le Roy (*A. T.*, 1900, p. 331) permet, dans certains cas, d'atteindre, *par un ensemble régulier d'opérations*, la fonction dans tout son domaine d'existence, *y compris le voisinage des points singuliers.*

Si la fonction analytique est *algébrique,* il suffit d'un nombre *fini* d'éléments pour la représenter (en supposant que le point à l'infini est ordinaire).

[2] Voici la démonstration de M. Poincaré :

Partons d'un élément $\mathfrak{P}_0$. Désignons par $P_1, P_2, \ldots, C_1, C_2, \ldots$ les ensembles formés par les éléments $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots$ et par leurs cercles de convergence; désignons par $p_1, p_2, \ldots, c_1, c_2, \ldots$ les ensembles que l'on en déduit en gardant seulement les éléments dont les centres ont des coordonnées rationnelles. Les ensembles P_ν et C_ν ont la *puissance du continu;* les ensembles p_ν et c_ν sont *dénombrables.*

Je dis que le calcul de la fonction analytique proposée le long d'une courbe arbitraire aboutissant à un point arbitraire peut toujours se faire en *substituant aux éléments tirés des ensembles* P_ν *des éléments appartenant aux ensembles* p_ν.

En effet, *tout point* INTÉRIEUR *à l'un des cercles* C_1 *est* INTÉRIEUR *à l'un des*

187. Reprenons, avec cette définition de fonction analytique, un problème posé au début : *A quelles conditions deux fonctions définies respectivement dans deux régions sans partie commune appartenant à un domaine d'un seul tenant doivent-elles être regardées comme une même fonction?*

Au temps d'Euler, avons-nous dit, la question n'aurait pas été posée, ou bien on aurait donné cette réponse, trop étroite et trop large (¹) : *On a la même fonction, lorsque l'expression analytique est la même* (²).

Aujourd'hui, au sens de Weierstrass, une expression analy-

---

cercles c_1, et tout cercle ayant avec un cercle C_1 une région commune a une région commune avec un cercle c_1. Donc tout élément $\mathfrak{P}_2$ de l'ensemble P_2 est contigu à un élément de l'ensemble p_1, et, en général, tout élément de l'ensemble P_{i+1} est contigu à un élément de l'ensemble p_i. Par suite, les éléments $p_1, p_2, \ldots$ suffisent pour obtenir toutes les valeurs de la fonction en un point déterminé, intérieur à l'un des cercles C_ν, quand on y arrive par tous les chemins possibles, puisque d'une part on arrive par un chemin déterminé à un point déterminé intérieur à l'un des cercles C_ν, en employant un nombre *fini* d'éléments, et que, de l'autre, la connaissance des valeurs de la fonction aux centres des éléments du type p_ν détermine la fonction dans tous les cercles C_ν.

Dès lors, on pourra procéder comme il suit pour compter le nombre des valeurs de la fonction et fixer un ordre à suivre pour les avoir toutes. Affectons d'un numéro d'ordre chacun des éléments p_1, ce qui permet de les ranger dans une première colonne; traitons de même les éléments p_2, et rangeons-les dans une seconde colonne; opérons ainsi une infinité de fois. Pour avoir toutes les valeurs de la fonction, il suffit d'associer par ordre à chaque élément de la première colonne tous les éléments contigus de la seconde, de faire suivre ensuite chaque élément de la deuxième colonne des éléments contigus de la troisième, et ainsi de suite. Si loin que l'on poursuive les opérations, on a toujours affaire à des ensembles dénombrables, car un ensemble dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Puisque, en un point donné, les déterminations d'une fonction analytique forment au plus un ensemble dénombrable, il n'y a pas de fonction analytique prenant en un point toutes les valeurs incommensurables. (Poincaré, *Rendiconti del Circolo di Palermo*, t. II, p. 197; 1888. — Borel, *Leçons, etc.*, p. 54.)

(¹) *Trop étroite :* par exemple les développements *différents*

$$1+\frac{x^4}{2}-\frac{1}{2}\frac{x^8}{4}+\ldots, \qquad x^2\left(1+\frac{x^{-4}}{2}-\frac{1}{2}\frac{x^{-8}}{4}+\ldots\right)$$

représentent la *même* fonction $\sqrt{1+x^4}$, suivant que l'on a $|x|<1$, $|x|>1$.

Trop large : voir page 5 et les exemples donnés plus loin dans ce numéro.

(²) Par *expression analytique*, nous entendons toute expression dont on peut calculer la valeur, en un point donné, par des opérations analytiques connues en nombre fini ou infini (addition, multiplication, intégration, etc.).

tique unique, pourvue de sens dans des régions séparées $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_1$, ..., représénte dans ces régions la même fonction quand la fonction analytique (qui est définie dans la région $\mathfrak{D}$ par l'expression analytique), *prolongée* et amenée à la région $\mathfrak{D}_1$, est encore représentable par l'expression analytique considérée.

De même, deux éléments $\mathfrak{P}(x|a)$, $\mathfrak{P}(x|l)$ appartiennent à la même fonction quand une chaîne de cercles permet de passer de l'un à l'autre.

Weierstrass a ainsi établi que « le concept d'une fonction monogène d'un argument complexe et le concept d'une dépendance exprimable par une suite d'opérations arithmétiques ne se recouvrent pas entièrement. De là il suit que plusieurs théorèmes importants de la nouvelle théorie des fonctions ne peuvent être toujours appliqués aux fonctions de variables complexes, entendues dans le sens des anciens analystes Euler, Lagrange, etc. » (1).

Pour enlever tout doute, Weierstrass a formé une série de fractions rationnelles, convergente dans un domaine formé de n aires séparées $\mathfrak{D}_1$, ..., $\mathfrak{D}_n$ et représentant respectivement, dans chacune d'elles, n fonctions analytiques uniformes données arbitrairement et définies chacune dans tout le plan, sauf en des points isolés (2).

---

(1) WEIERSTRASS, *Œuvres*, t. II, p. 210 (trad. *B. D.*, 1881, p. 166).

(2) *Œuvres*, t. II, p. 212. La considération des intégrales de Cauchy a permis à M. Appell d'obtenir le résultat de Weierstrass sous une forme simple. Soient α, β, γ les affixes des centres de trois cercles se coupant deux à deux de telle façon que la région du plan extérieure à ces cercles se compose de *deux* parties séparées $\mathfrak{D}_1$ et $\mathfrak{D}_2$, la première limitée par trois arcs de cercle, la seconde indéfinie. Si l'on désigne par $f_1(x)$, $f_2(x)$ des fonctions holomorphes respectivement dans $\mathfrak{D}_1$ et $\mathfrak{D}_2$, on peut former une série

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n}{(x-\alpha)^n} + \frac{b_n}{(x-\beta)^n} + \frac{c_n}{(x-\gamma)^n}\right]$$

absolument et uniformément convergente dans $\mathfrak{D}_1$ et $\mathfrak{D}_2$, identique à $f_1(x)$ dans $\mathfrak{D}_1$ et à $f_2(x)$ dans $\mathfrak{D}_2$ (APPELL, *A. M.*, t. I, p. 145; *M. A.*, t. XXI. — HERMITE, *Cours, etc.*, 4e édit., p. 167).

Dans ces séries, les dénominateurs des éléments des fractions rationnelles sont élevés à des puissances grandissant indéfiniment; M. Painlevé a formé des séries de fractions rationnelles *n'ayant que des pôles simples*, qui représentent des fonctions distinctes dans des régions séparées.

Voir aussi : HERMITE, *J. de Crelle*, t. 91. — LERCH, *B. D.*, 1886.

Pour avoir *sous forme d'intégrale* l'expression analytique de fonctions du même type, il suffit de prendre des fonctions $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ holomorphes respectivement au moins dans les domaines $\mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_n$, et de poser

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f_1(z)}{z-x}dz + \ldots + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{f_n(z)}{z-x}dz.$$

La fonction $f(x)$ coïncide respectivement avec les fonctions $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ à l'intérieur des contours fermés $C_1, \ldots, C_n$, et est nulle à leur extérieur. (Ces contours sont aussi voisins que l'on veut des frontières des domaines $\mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_n$.)

Cette somme d'intégrales se transforme aisément, comme nous le verrons, en une série de fractions rationnelles (n° 189).

On obtient directement *sous forme de série* un exemple analogue à celui de Weierstrass en posant, avec M. Tannery [1],

$$\begin{aligned} s(x) &= \frac{1}{1-x} + \left(\frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{1-x}\right) + \ldots \\ &\quad + \left(\frac{1}{1-x^{2^n}} - \frac{1}{1-x^{2^{n-1}}}\right) + \ldots \\ &= \frac{1}{1-x} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2^{n-1}}}{x^{2^n}-1}. \end{aligned}$$

On en déduit

$$s_n(x) = \frac{1}{1-x^{2^n}}$$

et, pour $|x| < 1$,

$$r_n(x) = \frac{-x^{2^n}}{1-x^{2^n}}.$$

A l'intérieur de tout cercle décrit de l'origine avec un rayon R inférieur à l'unité, $|r_n|$ n'atteint pas $\frac{R^{2^n}}{1-R^{2^n}}$; par suite, la série $s(x)$ converge uniformément dans le cercle de rayon 1 décrit de l'origine et, dès lors, dans ce cercle est développable en une série entière $\mathfrak{P}(x)$ (p. 219).

De même à l'extérieur de ce cercle la série $s(x)$ peut être remplacée par une série du type $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$.

---

(1) *B. D.*, 1881, p. 181. — Le fait mis en évidence par ces exemples est aussi une conséquence immédiate de l'*existence* des fonctions analytiques *multiformes*, comme l'a montré M. Borel (*Leçons, etc.*, p. 58).

Sur le cercle de rayon 1, la série $s(x)$ n'existe pas. Aussi les séries $\mathfrak{P}(x)$, $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$, bien que représentées toutes deux par *la même expression analytique* $s(x)$, ne se continuent pas l'une l'autre : elles définissent *deux fonctions distinctes*. On voit du reste immédiatement que chacune de ces fonctions est une constante, car la série $s(x)$ a pour valeur 1 ou 0, suivant que l'on est à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle de rayon 1.

188. *A quelles conditions une fonction est-elle continuable au delà d'une coupure?*

Les conditions *nécessaires* prennent un grand nombre de formes; car une coupure est essentielle dès que, dans son voisinage, la fonction ne présente pas l'un des caractères des fonctions holomorphes, par exemple quand elle y a une infinité de zéros, de pôles ou de points essentiels formant une *suite linéaire*.

M. Painlevé a recherché les conditions *nécessaires et suffisantes* auxquelles *se prolongent* l'une l'autre deux fonctions $f(x)$, $f_1(x)$ respectivement holomorphes dans deux domaines $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}_1$ extérieurs l'un à l'autre et *dont les frontières coïncident en partie* (1).

Il faut et il suffit que ces fonctions soient bien déterminées (au sens de la note, p. 279) *et aient même valeur sur une partie* AB *de cette frontière commune* CD, sauf peut-être en des points de AB formant un ensemble ponctuel (2).

Ces conditions sont évidemment nécessaires.

Elles sont suffisantes. En effet, la fonction $f(x)$, bien déter-

(1) *A. T.*, 1888, B, p. 27. Par ce théorème, M. Painlevé indique donc les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une coupure soit artificielle.

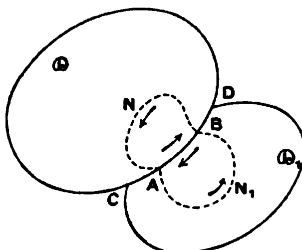
Ces conditions se simplifient quand la coupure est une *ligne analytique*, comme nous le dirons en traitant du prolongement par symétrie (n° 236).

Le principe de la méthode suivie par M. Painlevé se trouve dans le Mémoire de Riemann [*Sur les surfaces minima* (*Œuvres*, trad., p. 323)] et dans un Mémoire où M. Schwarz traite du prolongement *par symétrie* (*J. de Crelle*, t. 70, p. 107).

(2) Pour abréger la démonstration, nous exclurons le cas où il existerait sur l'arc AB de pareils points exceptionnels.

minée le long de l'arc AB, est continue sur cet arc et, par suite, intégrable; de plus, son intégrale le long de tout contour fermé ABNA (*fig.* 35) dont l'arc AB fait partie est nulle. La for-

Fig. 35.



mule de Cauchy est donc applicable. Suivant que l'on considère un point x intérieur ou un point x_1 extérieur au contour ABNA, on a

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\text{ABNA}} \frac{f(z)}{z-x}\,dz, \qquad 0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\text{ABNA}} \frac{f(z)}{z-x_1}\,dz.$$

De même, quel que soit le contour AN_1BA intérieur au domaine $\mathfrak{D}_1$ et dont l'arc AB fait partie, il vient

$$f_1(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\text{AN}_1\text{BA}} \frac{f_1(z)}{z-x}\,dz, \qquad 0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\text{AN}_1\text{BA}} \frac{f_1(z)}{z-x_1}\,dz,$$

x étant à l'intérieur de AN_1BA, et x_1 à l'extérieur.

Dès lors la fonction

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\text{ABNA}} \frac{f(z)}{z-x}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\text{AN}_1\text{BA}} \frac{f_1(z)}{z-x}\,dz$$

coïncide respectivement, dans les contours ABNA et AN_1BA, avec les fonctions $f(x)$ et $f_1(x)$. Cette fonction peut être représentée par une intégrale unique prise le long du contour AN_1BNA; car, d'après les hypothèses, les intégrales le long de AB et de BA ont même valeur. Par suite, quel que soit le contour simple AN_1BNA, on a

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\text{AN}_1\text{BNA}} \frac{F(z)}{z-x}\,dz;$$

c'est-à-dire que la fonction $F(x)$ est holomorphe dans le

contour AN_1BNA, et par suite dans le domaine $(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}_1)$: $f_1(x)$ est le prolongement de $f(x)$ [1].

189. Weierstrass regardait le *prolongement par séries enchaînées* surtout comme un excellent mode de *définition* de la fonction analytique, procédé d'autant meilleur qu'un ensemble dénombrable d'opérations régulièrement classées permet d'atteindre la fonction dans tout son domaine d'existence.

Ce procédé est-il aussi avantageux pour *l'étude effective* de cette fonction ? en d'autres termes, permet-il de la calculer en un point quelconque et d'en découvrir les propriétés? conduit-il à des représentations qui donnent l'expression de certaines branches de la fonction dans tout leur domaine d'existence, mettent en évidence les points singuliers dont le rôle est si capital même indépendamment du prolongement, soient uniques pour une fonction donnée, et enfin soient d'un maniement commode spécialement au point de vue de la dérivation et de l'intégration ?

La réponse n'est pas douteuse. La *recherche effective* de la fonction par cette chaîne de séries, recherche nécessaire aussi bien pour en *calculer les valeurs* en un point que pour en *avoir les points singuliers* (dans le prolongement ainsi envisagé, ces problèmes sont inséparables), est d'une extrême complication. La continuation de chaque série $\mathfrak{P}_b$ requiert la connaissance de son rayon de convergence : cette recherche se ramène à un problème déterminé (p. 136), puisque la série contiguë $\mathfrak{P}_a$ fournit les valeurs en b de la fonction et de ses dérivées; mais l'opération qu'elle nécessite est impraticable dans le cas général : et pourtant il faudrait la répéter une infinité dénombrable de fois.

Ainsi, on est conduit à examiner si d'autres méthodes de prolongement, tout en laissant intacte la définition *théorique* des fonctions analytiques, ne donneraient pas une meilleure définition *pratique*. En particulier, ne peut-on trouver des représentations telles que le *domaine d'existence* d'une branche uniforme de

---

[1] D'après cela, une fonction uniforme et continue dans un domaine $\mathfrak{D}$ est holomorphe dans $\mathfrak{D}$ ou y présente des espaces lacunaires; car, si elle est holomorphe en chaque point de $\mathfrak{D}$, sauf peut-être sur certaines lignes, elle est aussi holomorphe en chaque point de ces lignes.

fonction analytique coïncide avec le *domaine de convergence* des éléments introduits pour la représenter; ou du moins telles qu'une *série unique* donne explicitement cette branche de fonction en tout point de son domaine d'existence?

En réponse à la première question, on a obtenu diverses méthodes de prolongement analytique : prolongement au moyen des algorithmes introduits par M. Borel pour représenter les fonctions définies par des séries entières dans tout le polygone de sommabilité (p. 165); prolongement par *symétrie* (n° 236), par la méthode de M. Lindelöf ou de la *représentation conforme* (n° 235), ou encore à l'aide des *intégrales définies* considérées par M. Le Roy (¹).

La seconde question fut d'abord résolue pour des types particuliers de fonctions. C'est ainsi que M. Mittag-Leffler, au moyen de séries qui, si elles ne sont pas très maniables, convergent du moins dans tout le domaine d'existence de la fonction qu'elles définissent et mettent en évidence d'une façon simple ses singularités, apprit à représenter (d'une infinité de manières) les fonctions uniformes dont les singularités forment un ensemble isolé (n° 295), ou plus généralement énumérable (²).

MM. Runge, Painlevé et Hilbert en donnèrent les premiers une solution générale, grâce à l'introduction, non plus de séries de *puissances ascendantes de la variable,* dont le domaine de convergence est forcément limité par des cercles, mais de séries de fractions rationnelles ou de séries de *polynomes de degrés croissants*.

Voici comment procède M. Runge :

Désignons par $f(x)$ une fonction holomorphe dans un domaine $\mathcal{D}$ borné d'un seul tenant, et par C un contour fermé intérieur à ce domaine et aussi rapproché que l'on veut de sa frontière. La formule de Cauchy donne, pour l'expression analytique de cette fonction à l'intérieur de C,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-x}\,dz, \tag{1}$$

(¹) LE ROY, *Sur les séries divergentes* (*A. T.*, 1900, p. 326, 328, etc.).

(²) *A. M.*, t. IV. — *Cf.* aussi PICARD, *C. R.*, 1882, 1er semestre, p. 1405. — GOURSAT, *C. R.*, 1883, 1er semestre, p. 566. — GUICHARD, *A. E. N.*, 1883, p. 318.

et, par suite, d'après la définition de l'intégrale d'une fonction de variable complexe,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{n=\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{f(z_{\nu n})}{z_{\nu n} - x}(z_{\nu+1\,n} - z_{\nu n}),$$

z_{1n}, z_{2n}, $\ldots$, $z_{nn}(z_{n+1\,n} = z_{1n})$ sont les affixes de points arbitraires consécutifs pris sur la courbe C, et tels que les distances $|z_{\nu+1\,n} - z_{\nu n}|$ tendent vers zéro quand n croît indéfiniment. (Lorsque n grandit, aux points de division déjà pris sur la courbe on ajoute de nouveaux points.)

Posons

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=1}^{n} f(z_{\nu n}) \frac{z_{\nu+1\,n} - z_{\nu n}}{z_{\nu n} - x},$$

ce qui permet d'écrire

$$f(x) = \lim_{n=\infty} s_n(x) = s_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [s_{n+1}(x) - s_n(x)].$$

La fonction $f(x)$ se trouve exprimée par une *série dont les termes sont des fractions rationnelles* : c'est le résultat cherché (¹).

Après M. Runge, MM. Painlevé et Hilbert parvinrent par des voies différentes à ce théorème :

Toute fonction $f(x)$ holomorphe dans un domaine $\mathfrak{D}$ borné, simplement connexe, à contour simple C *et ne recouvrant jamais plusieurs fois le plan, est développable dans $\mathfrak{D}$ en une série de polynomes qui converge absolument et uniformément dans tout domaine intérieur à* $\mathfrak{D}$.

(¹) *A. M.*, t. VI, 1885. M. Runge montre même que cette série converge *uniformément* dans C. Ainsi se trouvent généralisés les développements de fonctions holomorphes à l'intérieur de contours formés d'arcs de cercles (p. 315), qu'avait indiqués M. Appell (*A. M.*, t. I, p. 145).

Les fractions rationnelles, et dès lors les éléments de la série $f(x)$ peuvent être exprimés par des séries de polynomes (M. Runge l'établit; *voir* aussi dans les notes suivantes les Mémoires de MM. Painlevé et Hilbert) : $f(x)$ est donc développable en une série de polynomes uniformément convergente.

On peut comparer ces théorèmes avec ceux qui sont relatifs au *domaine réel* (p. 30).

Pour l'établir, considérons avec M. Painlevé le cas simple ([1]) où le domaine $\mathcal{D}$ est convexe et a une frontière C telle que l'on puisse en chacun de ses points M tracer un cercle Γ tangent à C au point M et contenant $\mathcal{D}$ à son intérieur.

Désignons par z l'affixe de M, par a celui du centre du cercle Γ (quand z décrit C, on fera varier a d'une manière continue, sauf aux points anguleux de C), par x un point quelconque intérieur à $\mathcal{D}$. Sur C on peut écrire

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z-a} + \frac{x-a}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{(x-a)^n}{(z-a)^{n+1}} + \ldots$$

et remarquer que la série obtenue au second membre, envisagée comme fonction de z, converge uniformément sur C. Dès lors, si l'on remplace dans la formule de Cauchy (1) [elle est valable si $f(x)$ est holomorphe dans $\mathcal{D}$ et sur C] la fraction $(z-x)^{-1}$ par le développement ci-dessus, on peut intervertir les symboles d'intégration et de sommation, ce qui donne

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_C \frac{f(z)(x-a)^n}{(z-a)^{n+1}} dz = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x),$$

$P_n(x)$ désignant un polynome en x de degré n.

Pour obtenir ce même résultat, M. Hilbert, après avoir développé comme dans la méthode de M. Runge la fonction $f(x)$

([1]) *A. T.*, 1888, B, p. 84 (p. 83, il établit un résultat plus général). En chacun des points de C on peut tracer un cercle tangent à C et contenant $\mathcal{D}$ à son intérieur, si la courbe C n'a en chaque point qu'*un contact simple* avec sa tangente (p. 85). Plus tard, M. Painlevé a étendu ce théorème aux contours quelconques (*C. R.*, 1898, 1er semestre, p. 200 et 318). *Voir* aussi une troisième Note (p. 385) où M. Painlevé donne le moyen de représenter par une série de polynomes, absolument et uniformément convergente, dérivable terme à terme indéfiniment, une fonction analytique de *variable réelle*, holomorphe en chaque point d'un intervalle réel, *pourvu que l'on connaisse les valeurs de la fonction et de ses dérivées en un point de l'intervalle*, ainsi que, en chaque point, une limite du rayon du cercle dans lequel la fonction reste holomorphe et du module de la fonction dans chacun de ces cercles.

De ce théorème, relatif aux fonctions analytiques réelles, il en a déduit peu après une démonstration simple du théorème de M. Mittag-Leffler, relatif aux fonctions analytiques complexes, énoncé plus loin (*C. R.*, 1899, 1er semestre, p. 1277; 2e semestre, p. 27).

en une série de fractions rationnelles, démontre ces deux lemmes [1] :

1° *La loi énoncée est valable quand la frontière C est une* LEMNISCATE, *c'est-à-dire une courbe telle que le produit des distances de l'un quelconque de ses points à n points fixes soit constant.*

2° *A tout domaine* $\mathfrak{D}_1$ *intérieur à* $\mathfrak{D}$, *dont la frontière* C_1, *elle aussi, n'a pas de point double et ne rencontre pas* C, *correspond une lemniscate* L_1 *ne coupant ni* C *ni* C_1 *et ayant à son intérieur le domaine* $\mathfrak{D}_1$.

Ces lemmes admis, appelons $\mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_n, \ldots$ des domaines, tous intérieurs à $\mathfrak{D}$, tels que chacun renferme à son intérieur le domaine précédent et qu'à partir d'une valeur suffisamment grande de n, tout point intérieur à $\mathfrak{D}$ soit intérieur à $\mathfrak{D}_n$, $\mathfrak{D}_{n+1}, \ldots$: leurs frontières $C_1, \ldots, C_n, \ldots$ sont supposées sans point double et sans point commun entre elles.

Le second lemme permet de tracer entre C et C_1, C et $C_2, \ldots$ des lemniscates $L_1, L_2, \ldots$ du type ci-dessus. A l'intérieur de ces lemniscates, et par suite dans les domaines $\mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_n, \ldots$, on peut approcher autant qu'on veut de la fonction $f(x)$ au moyen de polynomes convenables $P_1(x), \ldots, P_n(x), \ldots$. Par exemple, dans ces domaines, on aura respectivement

$$|f(x) - P_1(x)| < 1,$$

$$|f(x) - P_2(x)| < \frac{1}{2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$|f(x) - P_n(x)| < \frac{1}{n},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et par suite, à la limite, dans le domaine $\mathfrak{D}$,

$$f(x) = \lim_{n=\infty} P_n(x)$$

(1) *Göttinger Nachrichten*, 1897, p. 63.

ou encore

$$f(x) = P_1(x) + [P_2(x) - P_1(x)] + \ldots + [P_{n+1}(x) - P_n(x)] + \ldots.$$

C'est la série demandée.

La représentation d'une fonction par la série de M. Runge comme par l'intégrale de Cauchy exige, pour être valable à l'intérieur d'un contour C intérieur à $\mathfrak{D}$, la connaissance des valeurs de la fonction en une infinité *dénombrable* de points qui doivent former un ensemble partout dense sur C. Comment opérer dans le cas si usuel où la fonction analytique est donnée par *sa valeur en un point intérieur à* $\mathfrak{D}$ *et les valeurs de ses dérivées en ce point,* en d'autres termes par un ensemble *dénombrable* $\mathcal{C}$ de constantes

$$\mathfrak{P}(0),\quad \mathfrak{P}'(0),\quad \ldots,\quad \mathfrak{P}^{(\nu)}(0),\quad \ldots,$$

satisfaisant aux conditions voulues pour que le rayon de convergence de la série de Mac Laurin correspondante,

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{P}^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!}, \tag{2}$$

ne soit ni nul, ni infini (p. 137)?

La connaissance de cet ensemble $\mathcal{C}$ suffit à M. Mittag-Leffler pour représenter dans tout son domaine d'existence, par une série de polynomes, une *branche* de la fonction analytique définie par la série (2) : ce résultat peut encore être établi en partant de l'intégrale de Cauchy (1).

Définissons d'abord la branche que représentera le développement, et pour cela *rendons uniforme par des coupures artificielles* la fonction analytique, en général multiforme, dont la série (2) est l'élément initial. Pour déterminer ces coupures, on effectue le prolongement de $\mathfrak{P}(x)$ le long d'un rayon issu de l'origine, c'est-à-dire au moyen de cercles *ayant tous leurs centres sur ce rayon.* S'il se rencontre sur ce rayon un point a_i faisant obstacle au prolongement, on fait une coupure rectiligne le long du rayon entre ce point a_i et l'infini. On opère de la même manière sur tous les vecteurs issus de l'origine.

Ces coupures une fois faites, l'ensemble des points du plan

qui ne sont situés sur aucune d'elles constitue un domaine d'un seul tenant à connexion simple : sa forme lui a fait donner le nom d'*étoile* (¹).

De même qu'à toute série entière (2) ou à tout ensemble $\mathcal{E}$ se trouve associé un *cercle de convergence,* de même le procédé indiqué fait correspondre à toute série (2) ou à tout ensemble $\mathcal{E}$ *une étoile déterminée* [ce sera l'*étoile appartenant à l'élément* $\mathfrak{P}(x)$] et une branche de fonction analytique uniforme dans l'étoile, dite *branche appartenant à l'élément* $\mathfrak{P}(x)$.

C'est cette branche de fonction dont le théorème de M. Mittag-Leffler donne l'expression dans toute l'étoile. En voici l'énoncé (²):

Une série $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)$ *ayant pour éléments des polynomes*

$$P_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\varphi(n)} c_{n\nu}\, \mathfrak{P}^{(\nu)}(0) x^\nu,$$

série qui converge dans toute l'étoile, converge uniformément dans tout domaine borné intérieur à l'étoile et ne converge uniformément dans aucun domaine continu renfermant un sommet de l'étoile, représente dans toute l'étoile la branche fonctionnelle appartenant à l'élément $\mathfrak{P}(x)$ (³).

(¹) Si la fonction a des lignes singulières, les points exclus de l'étoile forment des domaines d'aire différente de zéro.

(²) Dans l'étoile que l'on vient de définir, la série divergente provenant d'une série entière prolongeable est *uniforme* (p. 165). Son domaine de sommabilité est la région, fermée ou ouverte (renfermant l'origine), qui est limitée par les perpendiculaires aux rayons oa_i : on l'appelle *polygone de sommabilité* (les côtés eux-mêmes du polygone peuvent ou non en faire partie). *Cf.* BOREL, *Séries divergentes,* p. 125. Ainsi la théorie des séries sommables de M. Borel, au moins sous la forme exposée, ne fournit le prolongement de la fonction que *dans une partie de l'étoile* définie par M. Mittag-Leffler; par contre, dans cette région, elle donne une solution plus précise que celle de M. Mittag-Leffler (BOREL, *Séries divergentes,* p. 168).

(³) Dans ces polynomes P_n, les constantes données $\mathfrak{P}^{(\nu)}(0)$ qui définissent l'élément initial entrent linéairement. Quant aux coefficients $c_{n\nu}$, ils sont indépendants de ces constantes; leurs valeurs numériques peuvent être calculées en fonction de n et de ν (et choisies d'une infinité de façons différentes) dès qu'on connaît l'étoile. *Voir* MITTAG-LEFFLER, *C. R.,* 1899, 1ᵉʳ semestre, p. 1212; *A. M.,* t. XXIII, p. 43, et t. XXIV, p. 183.

Après que M. Mittag-Leffler eut énoncé et démontré son théorème, MM. Painlevé

En dehors de l'étoile, cette série peut avoir un sens, sans toutefois représenter *un prolongement* de la branche de fonction qu'elle définit. De nouvelles recherches ont fourni à M. Mittag-Leffler d'autres séries qui représentent une branche de la fonction dans tout son domaine d'existence et cessent de converger en dehors de ce domaine (comme les séries de Taylor) ([1]).

190. La question du prolongement *analytique* d'un élément de Taylor ne se pose pas en dehors du domaine d'existence de la fonction définie par cet élément : si l'on veut franchir une coupure *fermée*, à la notion de prolongement analytique il faut substituer une définition plus large du *prolongement*. A quel point de vue se placer pour obtenir une généralisation qui ne soit contradictoire ni avec elle-même, ni avec la notion de prolongement au sens de Weierstrass? Des propriétés de ce prolongement, lesquelles peut-on sauvegarder; comment restreindre le problème pour en diminuer l'indétermination ([2]).

(*C. R.*, 1899, 1er semestre, p. 1277, et 2e semestre, p. 92), Borel (*A. E. N.*, 1899, *Séries divergentes*, Chap. V; *C. R.*, 1900, 1er semestre, p. 1061, et 2e semestre, p. 830) et Leau (*Bull. Soc. Math.*, 1899, p. 194) y parvinrent par des voies plus simples.

Nous l'établirons au Chapitre VIII, en revenant sur les méthodes de représentation des fonctions analytiques, dont nous donnons plutôt ici un aperçu général.

([1]) *A. M.*, t. XXIV (troisième Note).

L'un des avantages fondamentaux de la définition de Weierstrass vient de ce que deux fonctions analytiques ne peuvent coïncider le long d'une ligne sans être identiques dans tout leur domaine d'existence. La première représentation, donnée par M. Mittag-Leffler (p. 320), conserve en partie cet avantage puisque, parmi les éléments qui entrent dans la série, ceux qui jouent un rôle essentiel dépendent uniquement des singularités. Au contraire de la généralité même des modes de représentation indiqués pour le problème général et de la multiplicité des solutions résulte ce grave inconvénient : ces séries peuvent représenter zéro sans être identiquement nulles.

([2]) Relativement à la position même de la question, M. Poincaré objecte qu'une fonction à espace lacunaire a dans cet espace une infinité de prolongements naturels possibles, et dès lors qu'aucun d'eux ne mérite ce nom (*American J.*, 1892, p. 211). Voici l'énoncé du théorème qu'il a établi :

« Soient deux fonctions φ et ψ admettant une ligne singulière essentielle fermée C et définies l'une à l'intérieur, l'autre à l'extérieur de cette ligne. On peut trouver deux fonctions f et g admettant respectivement pour lignes singulières deux portions différentes de C (formant à elles deux le contour C tout entier) pouvant, par suite, être prolongées analytiquement dans tout le plan et

Mentionnons quelques essais [1].

M. Fabry fait intervenir des considérations de *continuité*. Soit une fonction ayant une ligne singulière analytique L : il définit la valeur de la fonction (ou de l'une de ses dérivées) en un point a de L comme étant la limite, si elle existe, vers laquelle tend la fonction (ou l'une de ses dérivées) quand on se rapproche de a par un chemin arbitraire non tangent à L. Les points de L se trouvent ainsi partagés en points singuliers *ordinaires* (ce sont ceux où la fonction et ses dérivées ont des valeurs finies et déterminées) et en points singuliers *absolus*.

Quand deux fonctions, ayant en commun une ligne singulière L et définies, l'une d'un côté de cette ligne, l'autre du côté opposé, prennent ainsi que leurs dérivées les mêmes valeurs (valeurs finies et déterminées, au sens ci-dessus) sur L, sauf peut-être en des points de L formant un ensemble dénombrable l, elles constituent une fonction unique; cette fonction reste continue ainsi que ses dérivées sur tout chemin qui n'est pas tangent à L et ne passe par aucun point de l. Dans ces conditions, une des fonctions est regardée comme le prolongement de l'autre.

---

telles que la fonction $f+g$, singulière sur C, soit identique avec φ à l'intérieur de C, et avec ψ à l'extérieur de C. Dès lors, si l'on regardait $f+g$ comme définissant dans tout le plan une fonction unique, les fonctions arbitraires φ et ψ se prolongeraient l'une l'autre. »

Mais M. Borel répond aux raisons données en remarquant que, si une fonction admet une ligne singulière essentielle, la définition usuelle de l'uniformité des fonctions, en vertu de laquelle une fonction analytique définie par une série de Taylor est uniforme lorsqu'il est impossible de trouver en aucun point, par des prolongements successifs, deux valeurs différentes de la fonction, devient insuffisante. Par exemple, soient deux fonctions : l'une $f(x)$ uniforme ayant une coupure essentielle L, l'autre $g(x)$ non uniforme et devenant uniforme quand on lui donne cette même ligne L comme coupure artificielle. La somme des deux fonctions a la ligne L comme coupure essentielle, et par suite devient uniforme *du fait de la superposition des deux coupures*. On voit néanmoins que cette uniformité est comme accidentelle.

Ainsi l'on est amené à *modifier* et à compléter la définition de l'uniformité des fonctions, ce qui permettra de ne plus regarder comme uniforme les fonctions du type ci-dessus et fera disparaître la difficulté mentionnée (BOREL, *A. E. N.*, 1895, p. 19; *A. M.*, t. XXIV, p. 363).

[1] *Cf.* FABRY, *C. R.*, 1899, 1er semestre, p. 78. — PICARD, *C. R.*, 1899, 1er semestre, p. 193. — BOREL, *A. E. N.*, 1895 et 1899; *Leçons, etc.*, p. 100; *C. R.*, 1899, 1er semestre, p. 283; *A. M.*, t. XXIV. — LE ROY, *A. T.*, 1900.

La transformation des séries entières, même de celles à rayon de convergence nul, en séries de polynomes conduit M. Borel à définir, *a priori,* des fonctions de variable réelle, pourvues de dérivées de tout ordre en tout point d'un segment de l'axe réel, complètement déterminées, comme les fonctions analytiques, par leur valeur et les valeurs de leurs dérivées en un point de ce segment : les fonctions analytiques en sont un cas particulier.

Représentons par (M) une pareille fonction : on peut considérer des fonctions (M) existant sur un segment placé arbitrairement dans le plan, aussi bien que sur l'axe réel, puisqu'une transformation $[x, (\alpha + i\beta)x + \gamma + i\delta]$ remplace un segment de l'axe des x par un segment arbitraire.

Donnons-nous donc, en un point arbitraire d'affixe a, un ensemble E de nombres

$$f(a),\ f'(a),\ \ldots,\ f^{(n)}(a),\ \ldots.$$

Il peut arriver qu'il n'y ait dans aucune direction autour de a de fonction (M) correspondant à cet ensemble (l'étude de certaines séries en décidera). Mais il peut aussi en résulter une fonction (M) définie sur un nombre limité ou illimité de segments partant de a : alors on dit que l'ensemble E définit un *élément* de fonction (M).

Deux fonctions (M) étant définies respectivement sur deux segments ayant un point commun, l'une est le *prolongement* de l'autre, quand toutes deux ont même valeur ainsi que leurs dérivées en ce point commun.

Une fonction (M) définie sur un segment peut ne pas exister sur un autre segment rencontrant le premier; mais, comme dans la théorie de Weierstrass, si le prolongement existe dans la direction de ce second segment, *il est unique*. De plus, si la fonction (M) est, dans le voisinage d'un point, analytique sur un segment, le prolongement existe, au moins dans le voisinage de ce point, sur tout autre segment, et il coïncide avec celui que fournit le prolongement analytique ordinaire.

Appelons *ensemble de droites dense* dans tout le plan un ensemble Δ de droites tel que les distances de deux points quelconques du plan à une droite convenable de l'ensemble soient inférieures à un nombre arbitraire ε, et considérons les segments d'un tel ensemble intérieurs à un domaine $\mathfrak{D}$ d'un seul tenant.

Une fonction (M) sera regardée comme *définie* et comme *uniforme* dans le domaine $\mathcal{D}$, lorsqu'il existera une fonction (M) sur tous les segments d'un ensemble Δ du type ci-dessus intérieurs à $\mathcal{D}$, et que les fonctions (M) définies sur deux segments se coupant à l'intérieur de $\mathcal{D}$ se prolongeront l'une l'autre. Une branche de fonction (M) uniforme dans $\mathcal{D}$ est ainsi complètement déterminée par un seul de ses éléments.

Cela posé, considérons une fonction (M) définie dans un domaine $\mathcal{D}$ et une fonction analytique f définie dans une portion δ de $\mathcal{D}$, d'un seul tenant; elles coïncideront dans toute la région δ, si elles coïncident ainsi que leurs dérivées en un point de δ. Or la fonction (M) traverse, par des passages infiniment étroits, des coupures de la fonction f : on pourra la regarder comme prolongeant cette fonction en dehors de δ.

Cette théorie de M. Borel permet de prolonger des séries dont le rayon de convergence est nul, et par là de donner un sens aux séries toujours divergentes. C'est aussi le résultat qu'obtient M. Le Roy (¹) en introduisant ses séries divergentes sommables, qui rentrent dans la catégorie des séries asymptotiques de M. Poincaré : par l'emploi d'intégrales définies, il fait correspondre une fonction bien déterminée à une série entière dont le rayon de convergence est nul.

191. Voici comment on étend aux fonctions de *plusieurs variables* la notion de prolongement analytique.

Considérons une série de puissances à indices multiples, par exemple une série double $\sum \lambda_{ik}(x-a)^i(\xi-\alpha)^k$, convergente dans un champ double formé par deux cercles *associés* (C_a, Γ_α), et faisons correspondre deux lignes L et Λ situées respectivement dans les plans x et ξ, et passant par a et α. On y parviendra en définissant ces courbes par des équations de la forme

$$x = f(t) + i\,g(t), \qquad \xi = \varphi(t) + i\,\psi(t),$$

f, g, φ, ψ étant des fonctions convenablement choisies. Soient b et β deux points correspondants des lignes L et Λ, intérieurs au champ (C_a, Γ_α). Si l'on remplace la série donnée par une série

(¹) BOREL, *A. E. N.*, 1899, p. 79, 89, 95. — LE ROY, *A. T.*, 1900, p. 408, 417, 426.

procédant suivant les puissances de $x - b$ et $\xi - \beta$ [1], il pourra y avoir, parmi les champs doubles de convergence de la nouvelle série, des champs qui sortent du champ initial, et même de tous les champs (C_a, Γ_α) que l'on pouvait associer à la première série. En ce cas, la première série sera regardée comme l'élément initial d'une fonction prolongée par la seconde série ou second élément. Faisons varier de toutes les manières possibles les lignes L et Λ, les points b et β. *L'ensemble des éléments auxquels pourra conduire la répétition du procédé opératoire indiqué définira une fonction analytique de plusieurs variables.* Son domaine d'existence est formé des régions que les cercles de convergence pourront recouvrir. Il a pour *frontière* les points des lignes (L, Λ) qui séparent ceux que l'on peut atteindre par un nombre fini d'éléments de ceux auxquels on ne peut parvenir [2].

Au lieu de définir ainsi *a posteriori* la fonction analytique par *un système monogène de séries de puissances*, on peut faire abstraction du mode de génération de la fonction, et regarder comme analytique dans un domaine $(\mathfrak{D}_x, \mathfrak{D}_\xi)$ une fonction bornée, analytique par rapport à x dans $\mathfrak{D}_x$ quand ξ est fixe dans $\mathfrak{D}_\xi$, et réciproquement [3].

Mais s'il y a entre les fonctions d'une et de plusieurs variables analogie dans les définitions, il n'y en a plus dans les difficultés que présente leur étude. Les propriétés souvent diffèrent : ainsi les fonctions uniformes de plusieurs variables n'ont pas de *singularités isolées*, et dès lors n'existent pas dans un continuum arbitraire; elles ont *deux* types de singularités non essentielles, etc. Nous y reviendrons plus loin.

---

(1) Cette substitution est permise. *Voir* p. 213 et 219, ou bien p. 296.

(2) Désignons par R la limite supérieure des rayons des cercles C_a quand les rayons des cercles Γ_α tendent vers 0, par r un nombre positif *rationnel* inférieur à R, par ρ le plus grand rayon *associé* de r (p. 226). Les couples (r, ρ) forment un ensemble dénombrable, ainsi que les points (b_r, β_r) *à coordonnées rationnelles* des domaines $|x - a| < r$, $|\xi - \alpha| < \rho$. On peut obtenir toute la fonction par les seuls éléments de centres (b_r, β_r) (p. 313) et dès lors par une infinité *dénombrable* de séries.

(3) *Cf.* OSGOOD, *M. A.*, t. LII, p. 462; t. LIII, p. 461.

30568 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

